LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

Definición:
Supongamos un punto móvil P, que se desplaza en un plano a una distancia constante de un punto fijo O del mismo plano. Sabemos que ese punto recorrerá una circunferencia de centro O y de radio la distancia constante r. El conjunto de puntos de la circunferencia y solamente ellos, constituye el lugar geométrico del punto P.
Un Lugar Geométrico es entonces, una figura cuyos puntos gozan de una cierta propiedad que no poseen los puntos que no pertenecen a la figura.

Lugares Geométricos Fundamentales.

A) El lugar geométrico de los puntos del plano que distan una longitud dada r de un punto fijo O es la circunferencia de centro O y radio r.

B) El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos A y B fijos, es la mediatriz del segmento AB.

C) El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados de un ángulo convexo (xOy) es la bisectriz de dicho ángulo.

D) El lugar geométrico de los puntos del plano que distan una longitud dada d de una recta fija res el conjunto de dos paralelas a r trazadas a la distancia d de esta recta.

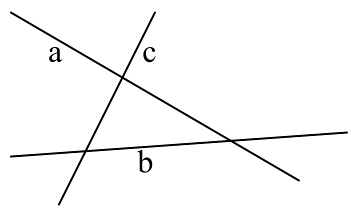
E) El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos recta secantes, es el conjunto formado por dos rectas perpendiculares entre si, que contienen a las bisectrices de los cuatro ángulos que las rectas determinan.

F) El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas es la paralela media.

G) El lugar geométrico de los puntos del plano que miran un segmento AB bajo un ángulo dado de amplitud α, está formado por dos arcos de circunferencia de cuerda AB y se llaman arcos capaces sobre AB de ángulo α .
Observación: En caso que $\alpha = 90°$, los arcos resultan ser dos semicircunferencias de diámetro AB, es decir una circunferencia de diámetro AB. (Lugar geométrico de Thales).

Ejemplos de problemas relacionados con lugares geométricos.

1) Construye una circunferencia tangente a dos rectas coplanarias conociendo el punto de tangencia con una de ellas. Discute según la posición de las rectas.
2) Construye una circunferencia que pase por dos puntos A y B dados y cuyo centro diste una longitud d dada de un punto fijo P.
3) Dados tres puntos alineados A, B y C (en ese orden) encuentra un punto P tal que: $<APB=45°$ y $<BPC=60°$.
4) Encuentra un punto que equidiste de las rectas a , b y c.



5) Sean A y B dos puntos fijos, distintos. Determina el lugar geométrico de los simétricos de B respecto de una recta variable r que pasa por A.
6) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de diámetro AB. Para todo punto M de $\mathcal{C}$, sea M´ el punto medio de AM.
   Determina el lugar geométrico de los puntos M´ cuando M varia en $\mathcal{C}$.

En el listado anterior, tenemos ejercicios donde utilizamos los lugares geométricos fundamentales para efectuar construcciones, pero también tenemos ejercicios donde se nos plantea el problema de determinar el lugar geométrico al que pertenece un determinado punto.
Dicho lugar geométrico debemos identificarlo nosotros y luego justificarlo y construirlo.
A continuación damos una idea de como efectuar este proceso.

Estudio de un Lugar Geométrico.

1) Búsqueda y Demostración.
   Es útil tener una idea de la naturaleza del lugar. Para ello podemos construir varias posiciones. En caso que:
   a) los puntos obtenidos estan alineados, podemos intuir que el lugar es una recta o un conjunto de puntos incluidos en ella. Trataremos de probarlo.
   b) Los puntos obtenidos no estan alineados,. Como la circunferencia es la única curva estudiada por el momento, podemos intuir que el lugar se trata de una circunferencia o un arco de circunferencia. Luego se tratará de probar.

Veamos un ejemplo:
Sean A y B dos puntos fijos de una recta r. Se traza una circunferencia variable $\mathcal{C}$, tangente en B a r y desde A se traza la segunda tangente AM a la circunferencia, siendo M su punto de tangencia. Determina el lugar geométrico de M.

Comenzemos con la búsqueda del lugar

Construimos tres posiciones particulares: M_1 , M_2 y M_3 del punto M.
Obervemos que no están alineados y parecen pertenecer a una circunferencia de centro A.
Si probamos que la distancia AM es constante, entonces logramos demostrar que el punto M pertenece a una circunferencia.
Esta primer figura se realiza en borrador, ya que es solamente una guía.
Para la demostración debemos hacer una nueva figura, con una única posición de M.

Demostración: $\overline{AM} = \overline{AB}$ por ser tangentes a $\mathcal{C}$ trazadas desde A, punto exterior a ella.

Como A y B son fijos, entonces $\overline{AB}$ es constante.

Concluimos que: $A \in C(A; \overline{AB})$.

Sabemos que el punto A "varía" sobre dicha circunferencia al considerar distintas circunferencias $\mathcal{C}$, pero no podemos afirmar aún, que el lugar geométrico de M sea dicha circunferencia. Podría ocurrir que A "se mueva" sobre un arco de dicha cfa, también podría pasar que uno o varios puntos de la circunferencia no pertenezcan al lugar geométrico de M. Este estudio lo realizaremos a continuación

Limitación del Lugar

Podemos observar que existen dos puntos de la $C(A;\overline{AB})$ que no pertenecen al lugar geométrico de M.
El punto M debe ser distinto de B, en este caso no podriamos trazar la circunferencia $\mathcal{C}$ del enunciado del problema.
El punto M también debe ser distinto del punto D, siendo D simétrico de B respacto de A, tampoco podríamos trazar la circunferencia $\mathcal{C}$ del enunciado en este caso.

Finalmente concluimos que: LG(M) = $C(A;\overline{AB}) - \{B;D\}$

Observemos que los límites del lugar se determinan considerando posiciones particulares para la circunferencia $\mathcal{C}$. En general estas posiciones particulares nos permiten deducir los límites del lugar.

Consejos Útiles

1) El lugar es una recta.(o varias), si el punto variable:
    a. está a una distancia constante de una recta fija, en cuyo caso son dos paralelas a la recta fija.
    b. equidista de dos puntos fijos, en cuyo caso es la mediatriz del segmento determinado por los puntos fijos.
    c. equidista de dos rectas fijas, en cuyo caso son las bisectrices de los ángulos formados por dichas rectas o la paralela media.
    d. pertenece a una recta que pasa por un punto fijo y forma un ángulo constante con una dirección fija.
    e. pertenece a una recta notable de la figura.
2) El lugar es una circunferencia (o un arco), si el punto variable:
    a. Está a una distancia constante r de un punto fijo O, en cuyo caso es una C(O; r).
    b. Es vértice de un ángulo cuyos lados pasan por puntos fijos, en cuyo caso es un arco capaz.

A menudo, en un problema de Lugar Geométrico, debemos probar que un segmento tiene longitud constante o que un ángulo tiene amplitud constante.

A) Se puede probar que son congruentes a un segmento o a un ángulo de la figura.
B) Se los puede calcular en función de otros elementos cuya longitud o amplitud sea constante.