

AXIOMAS - TEOREMAS

¿CÓMO SE CONSTRUYE LA GEOMETRIA MODERNA?

FUNDAMENTOS

1 – Comenzó siendo un **conjunto de reglas y conocimientos** obtenidos por la experiencia, usados por los constructores y medidores de terrenos. **Luego se organiza en forma deductiva** y es así que encontramos:

- Los **axiomas o postulados** (verdades imposibles de reducir a otras mas simples). Se admiten sin demostración.
- Los **teoremas** son proposiciones demostrables
- Los **conceptos primarios** que no es posible definir porque no es posible reducirlos a otros más sencillos.

Fundamentos:

A – **Enunciar**, sin definición los conceptos primarios

B – **Admitir sin demostración**, ciertas propiedades que relacionan estos conceptos, enunciando los axiomas correspondientes.

C – **Deducir lógicamente** las restantes propiedades o teoremas

¿CUÁLES SON LAS CONDICIONES QUE DEBE TENER UN SISTEMA DE AXIOMAS?

2 – Las condiciones son dos:

- **Los axiomas han de ser compatibles**, es decir ninguno de ellos debe estar en contradicción con los demás o sus consecuencias
- **Los axiomas deben ser independientes**, es decir ninguno de ellos o parte de ellos debe poder demostrarse como consecuencia de los demás.

¿CUÁLES SON LOS GRUPOS FUNDAMENTALES DE AXIOMAS ?

3 – Los grupos fundamentales de axiomas son:

- 1 – Relaciones de **enlace o incidencia**
- 2 – Relaciones de **ordenación**
- 3 – Relaciones de **igualdad o congruencia**.
- 4 – Relaciones de **paralelismo**
- 5 – Relaciones de **continuidad**

¿CUÁLES SON LOS AXIOMAS DE EXISTENCIA Y ENLACE ?

4 – **Existencia**

- Se reconoce la existencia de infinitos entes llamados puntos cuyo conjunto llamaremos "espacio" (Solo cuando los puntos cumplen ciertas relaciones)

- Los puntos del espacio se consideran agrupador en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados **planos**

Los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados rectas.

Enlace

- Los puntos, rectas, y planos se enlazan por ciertas relaciones de posición cuyas propiedades están contenidas en los siguientes axiomas:
- Axioma 1 – Por dos puntos distintos pasa una recta y solo uno, los puntos de una misma recta se dice que están alineados
- Axioma 2 – Por tres puntos no alineados pasa un plano y solo uno
- Axioma 3 – Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los demás puntos de la recta lo están también.

¿CUANDO UN CONJUNTO ESTA ORDENADO?

5 - Un conjunto de elementos esta ordenado linealmente cuando se pueden relacionar entre si mediante el verbo "**preceder**", de tal modo que:

- Dados dos elementos, A y B, entonces o A precede a B o B precede a A
- Si A precede a B y B precede a C, A precede también a C (**propiedad transitiva**)

¿CUANDO UN CONJUNTO ES ABIERTO?

6 – Un conjunto abierto de puntos **es un conjunto de puntos que no tiene ni primero ni último**. Dado un punto cualquiera existe por lo menos uno que le precede y otro que le sigue. Un conjunto es abierto cuando para cualquier punto existen alrededor de él, cerca de él, en un entorno de él, punto que están todos incluidos en el conjunto. Si un conjunto incluye puntos que están en su **frontera**, entonces no es abierto.

¿QUE ES UN CONJUNTO DENSO?

7 – Un conjunto denso de puntos es aquel en el que **no hay puntos consecutivos**, esto significa que dados dos puntos cualesquiera existe por lo menos otro situado entre esos dos. Si aplicamos esta definición una vez, y otra, y otra, vemos que los conjuntos densos son infinitos.

El recíproco no se cumple. Hay conjuntos infinitos que no son densos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales \mathbb{N} no es denso, porque entre el 4 y el 5 no hay ningún número natural. Tampoco son densos los enteros \mathbb{Z} .

El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} , es un conjunto denso. Entre el $4/7$ y el $5/7$ hay otro punto. ¿Cuál? Bueno, $4/7$ es igual al $40/70$. El $5/7$ es igual al $50/70$. Entonces entre ellos están el $41/70$, el $42/70$, $43/70$, etc.

¿QUE ES UNA RECTA?

8 – La recta es un conjunto linealmente ordenado de puntos que:

- No tiene ni primero ni último
- No hay puntos consecutivos

Por lo tanto la recta es un **conjunto de puntos linealmente ordenados abierto y denso**

¿QUE SON LAS ISOMETRIAS?

9 – Las isometrías están referidas al movimiento, pero ni el tiempo ni las posiciones intermedias son tenidas en cuenta en la teoría geométrica.

Entonces al hablar de movimiento geométrico de un **plano nos referimos exclusivamente a la transformación o correspondencia que resulta entre los puntos del plano en sus dos posiciones (inicial y final)**

Esto que se dijo más arriba, ¿parece ser una buena definición como para contestar en el día del examen? ¿O será sólo una primera idea para aproximarnos al tema?

Definición: Las isometrías son funciones biyectivas, del plano en si mismo, que conservan las distancias.

Como toda definición, tiene que ser clara y concisa, sin ambigüedades.

Entonces el dominio de estas funciones son todos los puntos del plano y el codominio también son todos los puntos del plano.

Propiedades, clasificación,todo esto falta en este resumen.

Axiomas

1 – Los movimientos del plano son transformaciones puntuales biunívocas, o lo que es lo mismo, funciones biyectivas. Esto quiere decir que a cada punto de la primera posición le corresponde un solo punto de la segunda posición.

2 – Todo movimiento conserva las relaciones de incidencia y ordenación de puntos, ejemplo si varios puntos están en una recta y ordenamos sus transformados también van a estar en una recta y ordenados.

3 – Ningún movimiento puede transformar un segmento o ángulo en una parte del mismo.

4- La transformación resultante de aplicar dos movimientos sucesivos es otro movimiento. Se llama producto de aquellos dos

5 – La transformación inversa de todo movimiento, es otro movimiento

DEFINICION DE FIGURAS CONGRUENTES

10 – Dos figuras F y F' son congruentes o iguales cuando una de ellas (F') puede obtenerse transformando la otra (F) mediante un movimiento y esta claro que el movimiento reciproco transforma a F' en F .

- Si F es congruente con F' , F' lo es con F , (**Propiedad Recíproca**)

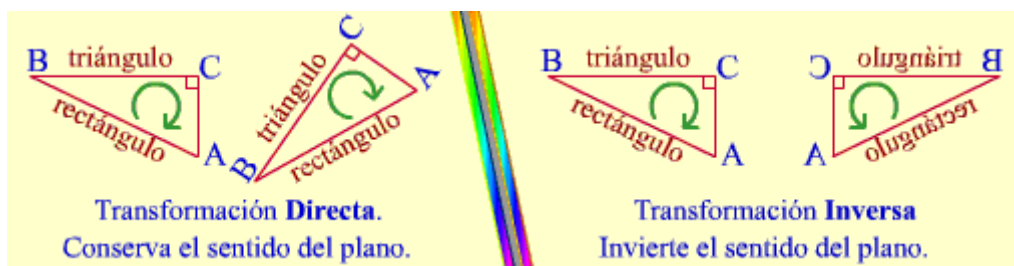
- Si F es congruente con F' y F' con F'' , F es congruente con F'' (**Propiedad**

Transitiva)

Finalmente toda figura es congruente consigo misma en la transformación **idéntica**.

¿CUANDO UNA ISOMETRIA ES DIRECTA?

11 – Cuando conserva el sentido del plano orientado, y por lo tanto el sentido de todo haz, de todo contorno poligonal.



En cambio es inverso aquel movimiento que transforma el sentido del plano orientado en su opuesto

¿CUANDO DOS TEOREMAS SON "CONTRARIOS"?

12 – El enunciado de un teorema tiene:

- Una premisa llamada **hipótesis** (que expresa lo que se supone que se verifica)
- Una conclusión llamada **tesis** (expresa lo que se demuestra que se verifica)

Dos teoremas son contrarios cuando la hipótesis y la tesis del teorema uno son las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del otro.

13- ESQUEMA LOGICO DE LAS RELACIONES ENTRE LOS TEOREMAS

DIRECTO

Si se verifica H
Se verifica T

RECIPROCO

Si se verifica T
se verifica H

CONTRARIO

Si no se verifica H
No se verifica T

CONTRARECIPROCO

Si no se verifica T
no se verifica H

Teoremas Recíproco: Dos teoremas se llaman recíprocos cuando la Tesis del uno es la hipótesis del otro y viceversa

Teoremas Contrarrecíprocos: Dos teoremas se llaman contrarrecíprocos cuando cada uno de ellos es el contrario del recíproco (o recíproco del contrario) del otro. Dos teoremas contrarrecíprocos son equivalentes, lo que se expresa diciendo que si se verifica H se verifica T, queda probado el contrarrecíproco, si no se verifica T no se verifica H

14 – DIFERENCIAS ENTRE CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE (Ejemplos)

En un teorema, de modo general: si se verifica H se verifica T, esto puede enunciarse de dos maneras:

- 1 – La hipótesis H es una **condición suficiente** para que se verifique la tesis T
- 2 – La Tesis T es una **condición necesaria** para que se verifique la hipótesis H

Ejemplos:

Si un punto está en la mediatriz de un segmento (H), equidista de sus extremos

Condición suficiente : Es suficiente que el punto esté en la mediatriz del segmento (H), para afirmar que equidista de sus extremos (T)

Condición necesaria : La equidistancia de los extremos (T) es condición necesaria para que el punto esté en la mediatriz (H)

15 – RECÍPROCOS PARCIALES - DEFINICIÓN – EJEMPLOS

Ocurre muchas veces que la hipótesis de un teorema es múltiple, es decir encierra varias condiciones, como por ejemplo un teorema de la forma. Si se verifican H_1, H_2, H_3 ; se verifica T, de tal forma que el recíproco es: Si se verifica T, se verifican H_1, H_2, H_3 , no es cierto.

En cambio puede ser cierto que al verificarse la tesis conjuntamente con alguna o algunas de las hipótesis parciales, se verifiquen las demás.

Por ejemplo :

Si se verifican T y H_1 ; se verifican H_2 y H_3

O bien, Si se verifican T y H_2, H_3 ; se verifica H_1

A estos teoremas se les suele llamar recíprocos parciales del antes enunciado, de modo que un mismo teorema puede tener varios recíprocos parciales, según las combinaciones que se hagan con las hipótesis.

Bibliografía: 1) "Geometría Métrica" de Pedro Puig Adam.

2) "Geometría Métrica" del Prof. Walter Fernández Val

Se agradece este material preparado por el estudiante Diego Danieli del grupo 2IA.

Escuela Técnica del BUCEO. Bachillerato en informática.

Revisado por el Prof. Saúl Tenenbaum. Diciembre, 2007.

Pregunta extra:

¿ Se puede estudiar **todo** el teórico para un examen de estas 5 paginitas ?

¿Alcanzará **sólo** con esto?