

Números Complejos

Hasta el momento, con los conjuntos numéricos conocidos, nos encontramos con algunas ecuaciones como por ejemplo la siguiente: $x^2 + 4 = 0$ que “no tiene solución” en el campo de los números reales.

Si **no** nos restringimos sólo al conjunto de los Reales, ecuaciones como $x^2 + 4 = 0$ tienen solución (no real).

Esto se logra introduciendo un nuevo número (que no es real) al que se denomina **unidad imaginaria** y se representa como i . Este número es tal que $i^2 = -1$, es decir que $i = \sqrt{-1}$. Con este nuevo número se amplía el campo de los reales dando lugar al conjunto de los **números complejos (C)**.¹

Con esta introducción, ahora se puede resolver $x^2 + 4 = 0$ de la siguiente manera:

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 4(-1) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4(-1)} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} \Leftrightarrow x = \pm 2i \text{ por lo tanto en } C \text{ la solución de } x^2 + 4 = 0 \text{ es } S = \{2i, -2i\}.$$

Por ejemplo, todas las ecuaciones de 2º grado tienen solución si admitimos la existencia de estos números. Resolveremos la siguiente ecuación en C:

$$2x^2 + 7x + 8 = 0$$

Ejercicio

- Resuelve en C $x^2 - 2x + 5 = 0$

DEFINICIÓN. NOTACIÓN

Definición:

Llamamos **número complejo** a los números que se pueden expresar de la forma $z = a + bi$ siendo $a \in R, b \in R, i = \sqrt{-1}$

Observemos que:

- Al **conjunto de los números complejos** lo expresamos como C
- Si $z = a + bi$, entonces a es su **parte real** ($Re(z)$) y b su **parte imaginaria** ($Im(z)$)
- Si $z = a + bi$, entonces se dice que z está expresado en **notación binómica**

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

NOTACIÓN CARTESIANA

Definición:

Dado un complejo $z = a + bi$ expresado en su forma binómica, considerarlo como $z = (a, b)$ es decir como un par ordenado cuya primer componente es su parte real y la segunda su parte imaginaria, es considerarlo en su **notación cartesiana**.

Observemos que.:

- De esta manera se lo puede representar en un sistema cartesiano como un punto de coordenadas (a, b) o como un vector OP siendo $O(0,0)$ y $P(a; b)$.
- $P(a; b)$ se le denomina afijo del complejo $z = a + bi$
- Es común referirse al eje horizontal como **eje real** y al vertical como **eje imaginario**.
- El plano determinado por los ejes se denomina **plano complejo**.

Ejercicios:

1) Representa en un sistema de ejes cartesianos los complejos $z = 2 + 3i, w = 3 - 2i, v = 5i, u = -3$.

2) Determina la parte real e imaginaria de los siguientes complejos:

$z = 1 - 3i, w = 4i, v = 5$. Representa gráficamente cada uno de ellos.

- Los reales son un **subconjunto** de los complejos (son aquellos con parte imaginaria nula).

¹ Las primeras referencias escritas acerca de los números complejos aparecen con los matemáticos indios *Mahavira* en 850 y *Bhaskara* en 1150 cuando trataban de resolver ecuaciones de segundo grado. A mediados del siglo XVI, *Girolamo Cardano* comienza a trabajar con raíces cuadradas de números reales negativos. En el siglo XVIII *Euler* introduce la notación i , notación que utilizamos hoy. A principios del siglo XIX *Carl Gauss* presenta a los números complejos como pares ordenados dándoles una interpretación gráfica.

- Dos números complejos son iguales si su parte real es igual y su parte imaginaria también.

Ejercicio:

Determina los reales x e y sabiendo que: $x + y + xy \cdot i = 5 + 4i$

OPERACIONES

Adición de Números Complejos

Si consideramos los números: $z = a + b \cdot i$ y $z' = a' + b' \cdot i$

La suma de los números complejos z y z' la calculamos así:

$$z + z' = (a + b \cdot i) + (a' + b' \cdot i) = (a + a') + (b + b') \cdot i$$

Ejercicio

Calcula $(z + w)$, siendo $z = 3 - i$ y $w = -6 + 4i$

Sustracción de Números Complejos

Para restar dos números complejos x e y , al minuendo le sumamos el opuesto del sustraendo, o sea:

$$x - y = x + (-y)$$

El opuesto del complejo $(a ; b)$ es $(-a ; -b)$

Ejercicio

Calcula $(z - w)$, siendo $z = 3 - i$ y $w = -6 + 4i$

Multiplicación de Números Complejos

Consideremos los complejos $x = (a, b)$ e $y = (c, d)$. Veremos una forma para efectuar la multiplicación de dichos números.

$$\begin{array}{r} a + b \cdot i \\ \times c + d \cdot i \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \cdot d \cdot i + b \cdot i \cdot d \cdot i \\ + a \cdot c + c \cdot b \cdot i \\ \hline \end{array}$$

$$a \cdot c + a \cdot d \cdot i + c \cdot b \cdot i + b \cdot d \cdot i^2$$

Observar en clase las diferentes potencias de la unidad imaginaria i .

$$x \cdot y = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Ejercicio

Calcula $(z \cdot w)$, siendo $z = 2 - 3i$ y $w = 1 + 4i$

Conjugado de un Complejo:

Sea el complejo $z = a + b \cdot i$ llamaremos conjugado de z y notaremos \bar{z} a un complejo de la forma:

$$\bar{z} = a - b \cdot i$$

Por ejemplo, el conjugado del complejo $(3 + 4 \cdot i)$ es $(3 - 4 \cdot i)$.

Observemos que:

- $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
- $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$
- $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$

EJERCICIOS

1) Considera los complejos $z = 1 + i$ y $w = 3i$.

- Representa gráficamente z y w .
- Determina los complejos $(z + w)$ y $z \cdot w$. Representa gráficamente.
- Determina los complejos $(-w)$ y $(z - w)$.

- d) Determina los complejos $(\bar{z} \cdot w)$, $(z \cdot \bar{w})$ y $(\bar{z} \cdot \bar{w})$.
- 2) a) Hallar un complejo $z / z + (4 + 3i) = 6 - 3i$
 b) Determinar un complejo $w / \bar{w} + 3 - 2 \cdot i = i$
 c) Efectuar la siguiente operación:

$$z \cdot w - (-2 + 4i)$$
 Representa graficamente el número complejo obtenido.
- 3) a) Dado $z = -1 + i$; representa graficamente z , su opuesto y su conjugado.
 b) Efectuar las siguientes operaciones:

$$i) z + \bar{z}$$

$$ii) z \cdot \bar{z}$$
- 4) Hallar z y w complejos/
- $$\begin{cases} z + (1 + i) \cdot w = 1 + 2 \cdot i \\ i \cdot z - 3 \cdot w = 1 \end{cases}$$

División de Números Complejos

Dados dos complejos z y w , con $w \neq 0$. Para expresar en forma binómica el cociente de z y w , podemos proceder de la siguiente forma:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \times \bar{w}}{w \times \bar{w}} ; \text{ (multiplicamos } z \text{ y } w, \text{ por el conjugado de } w)$$

Ejercicios

- a) Efectuar las siguientes divisiones:

$$\frac{1+i}{3+2i}; \frac{-2+2i}{3i}; \frac{5i}{-1+2i}; \frac{1-2i}{5}$$
- 2) Sean: $z_1 = \sqrt{3} + i$ y $z_2 = -\sqrt{3} + i$
 b) Representar sus afijos y hallar y representar graficamente:
 $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $\overline{z_1 + z_2}$, $z_1 \cdot z_2$.
- c) Representar graficamente: $\frac{z_1}{z_2}; z_1 \cdot \overline{z_2}$

NOTACIÓN POLAR Y TRIGONOMÉTRICA

- La ubicación de un punto P en el plano puede quedar determinada de dos maneras: por sus coordenadas (notación cartesiana) o por la distancia de O hasta P y el ángulo que determina OP con el eje Ox (notación polar).

Definición:

Dado un complejo $z = a + bi$ expresado en su forma binómica, considerarlo como $z = r \angle \theta$ es considerarlo en su **notación polar** donde r es su **módulo** y θ su **argumento**

Veremos a continuación la relación entre la parte real, la parte imaginaria, el módulo y el argumento de un número complejo.

Observación: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = r \cos \theta$ y $b = r \operatorname{sen} \theta$

Definición:

Dado un complejo $z = r \angle \theta$, considerarlo como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ es considerarlo en su **notación trigonométrica**.

Ejercicio:

Expresa en notación polar y trigonométrica los complejos:

$z = 1 + i, w = (-3;6), u = -1 - i, v = 2 - i$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN NOTACIÓN POLAR

Sean $z = r_1 \angle \theta_1$ y $w = r_2 \angle \theta_2$

$$z \cdot w = r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

$$z : w = r_1 \angle \theta_1 : r_2 \angle \theta_2 = r_1 : r_2 \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Observación: Multiplicar por el complejo i , equivale a rotarlo 90° , sentido antihorario con centro O

$$\rho \angle \varphi \cdot 1 \angle \frac{\pi}{2} = \rho \angle (\varphi + \frac{\pi}{2})$$

POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL.

$$(r \angle \theta)^n = r^n \angle n\theta, \quad (\forall n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicios

1) Considera los complejos.

$$a) z = 1 \angle \frac{\pi}{3} \quad b) z = 3 \angle \pi c) z = \frac{1}{2} \angle \frac{\pi}{2} \quad d) z = 1 \angle \frac{7\pi}{3}$$

- 1) Representa sus afijos.
- 2) Exprésalos en notación binómica.

2) Dados los complejos:

$$z_1 = 4; z_2 = 6 - 2\sqrt{3}i; z_3 = 5i; z_4 = 1 + i; z_5 = -3; z_6 = -2 + 2i; z_7 = -4i$$

$$z_8 = -2 - 2i$$

- a) Representarlos graficamente.
- b) Expresar cada uno de ellos en forma polar.

$$c) \text{ Efectúa las siguientes operaciones: } z_1 \cdot (z_2 + z_3); (z_4)^5; \frac{z_1}{z_2} \times \frac{z_4}{z_6}; (z_8 + z_7)^7$$

POLINOMIOS

- Estudiemos ahora los *Polinomios* sin restringirnos a variables reales, consideremos ahora variables complejas.
- Todas las propiedades y definiciones vistas con variables reales siguen siendo válidas para el caso de variable compleja. Señalaremos a continuación alguna propiedad adicional.

Teorema:

Si un polinomio de coeficientes reales admite como raíz a un complejo, entonces también admite a su conjugado

$$\text{Sea } P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{C} \quad \wedge \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\text{Si } P(z) = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0$$

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de variable compleja de grado mayor o igual a uno, con coeficientes complejos admite por lo menos una raíz

Corolario:

Todo polinomio de grado impar con coeficientes reales, admite por lo menos una raíz real.

Dem:

Supongamos por el absurdo que no admite ninguna raíz real, es decir que todas sus raíces son complejas, entonces (.....) por cada una de sus raíces complejas admite otra (su conjugada), es decir tiene un número par de raíces.....

Ejercicios:

- 1) Dado $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 11x^2 - 4x - 6$ resuelve en \mathbb{C} : $P(x) = 0$ sabiendo que $(1 + i)$ es una de sus raíces.
- 2) Dado $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, calcula a, b, c y d sabiendo que 2 y $(2 - 3i)$ son raíces de Q y que $Q(0) = 26$.