INFINITOS EQUIVALENTES

Diremos que f es un infinito para $x \to \alpha$ si y sólo si: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty(-\infty)$

Definición: Dos infinitos f y g son equivalentes para $x \to \alpha$ si y sólo si: $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Anotamos: $f(x) \sim g(x)$ para $x \to \alpha$.
Ejemplo:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2+4x+4) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+4x+4}{2x^2} = 1$ (verifícalo)

Entonces: $2x^2 + 4x + 4 \sim 2x^2$ para $x \to +\infty$
2) Complete:
Para $x \to +\infty$; $-3x^3 + 4x - 10 \sim$ .... ; $x - 3 \sim$ .... ; $3x + 6 \sim$ .... Justifique cada respuesta.

Teorema

H) f es un infinito para $x \to \alpha$.

Existe $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x).g(x) = \begin{cases} b \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

$f(x) \sim h(x)$ para $x \to \alpha$

T) $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x).g(x) = \begin{cases} b \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

Demostración:

$$\lim_{x\to\alpha} h(x).g(x) = \lim_{x\to\alpha} \overbrace{\frac{h(x)}{f(x)}}^{1}.\overbrace{f(x).h(x)}^{b;\ +\infty;\ -\infty.} = \begin{cases} b \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

En forma análoga, se puede demostrar un teorema similar para sustituir en un cociente.

Ejercicios

1) Calcula: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^2+3x+2).(-3x+2)}{(x+3).(2x^2+1)}$; 2) Demuestre que para $x \to -\infty$; $2x^3 + 4x^2 - 5 \sim 2x^3$

ORDENES DE INFINITOS.

Hemos manejado en el curso ideas como esta: "esta función crece más rápido que esta otra" o " este es un infinito mayor que este otro".

Por ejemplo $\mathbf{x^2}$ y $\mathbf{x}$ son infinitos para $x \to +\infty$, pero $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x} = +\infty$, por lo tanto la primer expresión crece más rápido que la segunda. Diremos que: "***El orden de x^2 es mayor que el de x para $x \to +\infty$***"

Ejercicio: Realiza un gráfico comparando ambas.

Definición: f y g son infinitos para $x \to \alpha$.

Orden (f(x)) = Orden (g(x)) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$; $k \neq 0$.

Orden (f(x)) > Orden (g(x)) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty(-\infty)$.

Orden (f(x)) < Orden (g(x)) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ejercicio: Comprueba que: orden(x^3) > orden(x^2), cuando $x \to +\infty$.
Observemos que dos infinitos equivalentes son del mismo orden.
Enunciaremos un teorema que nos será muy útil para el cálculo de límites.

<u>TEOREMA</u>.

H) f y g son infinitos para $x \to \alpha$.
Orden(f(x) > Orden(g(x)).

T) a) f(x) + g(x) es un infinito para $x \to \alpha$.
b) $f(x) + g(x) \sim f(x)$ para $x \to \alpha$.

<u>Demostración</u>:

a) $$\lim_{x\to\alpha} f(x)+g(x) = \lim_{x\to\alpha} \overset{+\infty(-\infty)}{\overset{\uparrow}{f(x)}}.\Big(1+\overset{1}{\overset{\uparrow}{\frac{g(x)}{f(x)}}}\Big) = +\infty(-\infty)$$

Entonces (f(x) + g(x)) es un infinito para $x \to \alpha$.

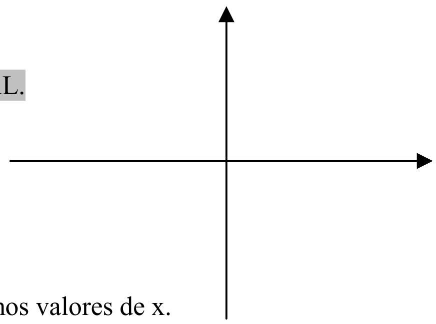
b) $$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)+g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\alpha} 1+\frac{g(x)}{f(x)} = 1$$

entonces, $f(x) + g(x) \sim f(x)$ cuando $x \to \alpha$.

INFINITOS LOGARÍTMICO, POTENCIAL Y EXPONENCIAL.

Sabemos que para $x \to +\infty$

Orden (x) < Orden (x^2) < Orden (x^3)



Realizaremos las gráficas de las funciones:

f: $f(x) = e^x$ g: $g(x) = Lx$ h: $h(x) = x^2$

- Observa sus comportamiento para $x \to +\infty$.
- A partir del número 10 compara las imágenes para los mismos valores de x.

Admitiremos que:

$$Ord\left[L^m(u)\right] < Ord\left[u^p\right] < Ord\left[a^u\right]$$
$$u \to +\infty;\ m > 0; p > 0; a > 1$$

<u>Ejemplo1</u>

Calcular, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$. Orden ($e^x$) > Orden (x) $\Rightarrow$ $\mathbf{e^x - x \sim e^x}$ con $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

<u>Ejemplo 2</u>

Calcularemos el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + x + Lx}{x^2 + 2e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2e^x} = \dfrac{1}{2}$

INFINITÉSIMOS

Diremos que f es un infinitésimo para $x \to \alpha$ si y sólo si: $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$

Ejemplos:

1) f: f(x)= $x^2 - 2x + 1$ es un infinitésimo para $x \to 1$
2) g:g(x) = $1/(x-2)$ es un infinitésimo para $x \to +\infty$

Definición:

Dos infinitésimos f y g son equivalentes para $x \to \alpha$ si y sólo si: $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}(x+x^2) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 0} x = 0 \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x.(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(1+x) = 1$$

por lo tanto, para $\mathbf{x \to 0}$, $\mathbf{x + x^2 \sim x}$.

Realiza las gráficas de las funciones f: f(x) = $x + x^2$ y g: g(x) = x, observa que ocurre para valores de x próximos a 0.
Podemos probar teoremas análogos a los que demostramos para infinitos, los cuales nos permiten sustituir un infinitésimo, por otro equivalente tanto en un producto como en un cociente. Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2)(x+1)}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{4} = \frac{1}{4}$$

ALGUNOS INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES.

TEOREMA 1 *Si $x\to 0$ entonces: $L(1 + x) \sim x$*

Realiza el gráfico de las funciones: f:f(x) = L(1 + x) y g:g(x) = x.

- Observa que son tangentes en (0;0).
- ¿Qué interpretas al observar los gráficos?

Aplicaciones.

Calcula los siguientes límites: $\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{3x}$ $\lim_{z\to 0}\frac{L(1+z^2)}{3z}$

TEOREMA 2 Si $z \to 1$ entonces: $L(z) \sim z - 1$.

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to 1}\frac{Lx}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \ldots$ 2) $\lim_{x\to +\infty} x.L(\frac{x+1}{x-2})$

TEOREMA 3 Si $a \in R^+$ y $x \to 0$ entonces: $a^x - 1 \sim x.La$

Nota: Si tomamos a = e, como Le = 1, tenemos: $e^x - 1 \sim x$, para $x \to 0$

Realiza las gráficas de f: f(x) = $e^x - 1$ y g: g(x) = x. Observa que ocurre.

Ejercicios:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{6x} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x^2}-1}{3x^3}$$