

Existe un conjunto de números llamados reales en el que están definidas 2 operaciones: Adición (+) y multiplicación (·).

Esta estructura se indica así: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (Axioma de Cuerpo)

Sean **a**, **b** y **c** reales cualesquiera

Propiedades	Adición (+)	Multiplicación (·)
Conmutativa	A1 - $a + b = b + a$	M1 - $a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	A2 -	M2 -
Existencia del neutro	A3 - $(\exists 0), 0 \in \mathbb{R}$ tal que: $a + 0 = 0 + a = a$	M3 -
Existencia del simétrico	A4 - (Opuesto).....	M4 - (Inverso) $(\forall a), a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ $(\exists 1/a)$, $1/a \in \mathbb{R}$ tal que: $a \cdot 1/a = (1/a) \cdot a = 1$
Distributiva	D -	

A partir de esta estructura se pueden varias propiedades útiles para resolver ecuaciones.

1 - **Monotonía de la suma:** Si $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
 Resolver en \mathbb{R} . (Justifica la propiedad aplicada)
 $x + 4 = 9$

2 - **Monotonía de la multiplicación:** Si $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$
 Resolver en \mathbb{R} . (Justifica la propiedad aplicada)
 $4 \cdot x = 8$

3 - **Propiedad cancelativa (+):** Si $a + c = b + c \Rightarrow a = b$
 Resolver en \mathbb{R}
 $2x + x^4 - 2 = x + 3 + x^4$

4 - **Propiedad cancelativa (·)** $\left. \begin{matrix} a \cdot c = b \cdot c \\ c \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = b$
 Resolver en \mathbb{R} .
 $(x + 2) \cdot (x - 3) = 7 \cdot (x - 3)$

5 - **Propiedad de Absorción del producto.**

$a \cdot 0 = 0$

Hallar $m \in \mathbb{R}$ para que: $(m + 6) \cdot (m + 1) = (m + 6) \cdot 2m$

6 - **Propiedad Hankeliana.**

$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$.

Resolver en \mathbb{R} : $t^2 + t = 0$

Ejercicios.

1) Resuelva en \mathbb{R} e indique las propiedades utilizadas.

- a) $2x + 1 = x + 4$
- b) $3x^2 + 5x = 0$
- c) $2x + 1/(x + 1) = 2 + 1/(x + 1)$
- d) $(x - 3) \cdot (x + 8) = 0$
- e) $(6x - 3) \cdot 2x - (6x - 3) = x^2 \cdot (6x - 3)$

2) Aplicando la propiedad en el recuadro, resuelva las ecuaciones a) y b)

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \quad \text{ó} \quad x = -y$$

- a) $(x - 2)^2 = 9$
- b) $(x - 2)^2 = (x - 1)^2$

Ficha 2

3/2008

Axioma de Orden.

Este axioma nos permite definir los conceptos de mayor y menor.

\mathbb{R}^+ ----- Reales positivos.

O1) Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (a + b) \in \mathbb{R}^+$ y $(a \cdot b) \in \mathbb{R}^+$.

O2) Si $a \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+$ ó $(-a) \in \mathbb{R}^+$

O3) $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Definiciones:

- 1) $a > b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+$.
- 2) $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ ó $a = b$.
- 3) $a < b \Leftrightarrow b > a$.
- 4) $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ó $a = b$.

1) Propiedad Transitiva de $>$

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ b > c \end{array} \right\} \Rightarrow a > c$$

2) Propiedad de Monotonía de $+$

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

3) Propiedad de Monotonía de \cdot

$$a > b \text{ y } c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

$$a > b \text{ y } (-c) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

Ejercicio.

Hallar los valores que verifican la siguiente desigualdad, $2x + 5 > x + 3$. Detalle las propiedades que utilizó en cada paso.

Ejercicio.

Indica con V ó F si son verdaderas ó falsa respectivamente cada una de las siguientes afirmaciones.

- a) Si $x < y$ entonces $x \cdot z < y \cdot z$ para todos x, y, z reales ($z \neq 0$)
- b) Para todo z real, si $z \neq 0$ entonces $z^2 > 0$
- c) Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$ para todos a y b reales
- d) Si a y b son reales positivos, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Valor Absoluto de un Real.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: $|3| = 3$ $|-14| = 14$ $|0| = 0$
 $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ $||1 - \pi| - 3| = 1$ $|\pi - 4| = 4 - \pi$

Resuelve graficamente:

$|x| = 4$; $|x| < 3$; $|x| > 5$ $|x| \leq 3$; $|x| \geq 5$

PROPIEDADES.

Sean x e y dos reales cualesquiera.

- 1) $|x| \geq 0$
- 2) $|x| = |-x|$
- 3) $\sqrt{x^2} = |x|$
- 4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- 5) $|x/y| = |x|/|y|$; $y \neq 0$
- 6) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Ejercicios

Resolver en \mathbb{R} : $|1 + 2x| < 1$; $|1 - x| < 9$; $|x - 1| > 2$; $|x + 2| > 5$

Ficha 3

3/2008

Sea $A = \{x, x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 4\}$



Diremos que el número 5,3 es **cota superior** de A porque $x \leq 5,3$, $(\forall x), x \in A$.

En general cualquier número mayor ó igual que todo elemento del conjunto es una cota superior de A .

Trata de contestar las siguientes preguntas:

- ¿ $\sqrt{109}$ es cota superior de A ?
- ¿-3 lo es? ¿y 4?
- ¿Existe una cota superior de A menor que 5,3?
- ¿Existe una cota superior de A menor que todas las cotas superiores del conjunto?, ¿cuál sería?
- ¿Si llamamos extremo superior ó supremo de A a la menor de las cotas superiores, ¿cuál sería el extremo superior de A ?
- Un conjunto tiene máximo si una de sus cotas superiores pertenece al conjunto. ¿El conjunto A tiene máximo?
- Análogamente, ¿podrías determinar tres cotas inferiores de A , observar si tiene extremo inferior (ínfimo) y si tiene mínimo?

A partir de la actividad anterior completaremos las siguientes definiciones.

Sea A un conjunto de reales no vacío.

A está **acotado superiormente** $\Leftrightarrow (\exists h), h \in \mathbb{R} / (\forall x), x \in A, x \leq h$.

Al real h lo llamamos cota superior de A .

A está **acotado inferiormente** $\Leftrightarrow (\exists k), \dots\dots\dots$

Al real k lo llamamos cota inferior de A .

3) A está **acotado** $\Leftrightarrow A$ está acotado inferior y superiormente.

4) M es **máximo** de $A \Leftrightarrow M \in A$ y $(\forall x), x \in A, x \leq M$.

5) M es **mínimo** de $A \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

6) Si existe la cota superior mínima de A , se le llama **extremo superior** ó **supremo** de A . ($\overline{\text{ext}}(A)$)

7) $\dots\dots\dots$

Ejercicio.

Para cada uno de los siguientes conjuntos, halla extremo superior, inferior, máximo y mínimo si existen.

$$A = \{x/x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 5\}; B = \{x/x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 5 \text{ ó } 6 \leq x < 7\}$$

$$C = \{x/x \in \mathbb{R}, x > 0 \text{ y } x^2 < 4\}; D = \{x/x \in \mathbb{R}, \frac{x-1}{x+1} < 0\}$$

AXIOMA DE COMPLETITUD

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A está acotado superiormente entonces $\exists K \in \mathbb{R} / K = \overline{\text{ext}(A)}$

Potencias.

Propiedades.

Sean $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ 4) $a^x : b^x = (a : b)^x$

5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Logaritmos

Definición: Logaritmo de a en base b .

Sean $a \in \mathbb{R}^+$; $b \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$

$$\text{Log}_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Propiedades

Sean $a \in \mathbb{R}^+$ y $a' \in \mathbb{R}^+$

$b \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$

1) $b^{\log_b a} = a$ 2) $\log_b b^x = x$

3) $\log_b b = 1$ 4) $\log_b 1 = 0$

5) $\log_b (a \cdot a') = \log_b a + \log_b a'$ 6) $\log_b (a : a') = \log_b a - \log_b a'$

7) $\log_b a^x = x \cdot \log_b a$ 8) $\log_b \sqrt[n]{a} = (1/n) \cdot \log_b a$

9) **Cambio de base** $\text{Log}_b a = \log_c a / \log_c b$ con $c > 0$ y $c \neq 1$.

Logaritmos Naturales

Son logaritmos en base e . Notación: $\log_e a$ se anota La ó $\ln a$.

Ejercicios

1 - Resuelve en \mathbb{R}

a) $L(2x-1) = 1$ b) $3 + L\left(\frac{1}{x}\right) = 2$ c) $L|3x-1| = 0$

c) $e^{x^2-4x} = 1$ d) $e^{2x} - e^x = 0$

INTERVALOS Y ENTORNOS

Intervalos.

1 - Dados a y b reales, $a < b$.

Al conjunto $\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ lo llamamos *intervalo cerrado* de extremos a y b .

Anotamos: $[a, b]$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



2 - Dados a y b reales, $a < b$.

Al conjunto $\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ lo llamamos *intervalo abierto* de extremos a y b .

Anotamos: (a, b)

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



Ejercicio: Completar y representar graficamente.

3 - $[a, b) = \{ \dots \dots \dots \}$

4 - $(a, b] = \{ \dots \dots \dots \}$

5 - $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / a \leq x \}$



6 - $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / a < x \}$



7 - $(-\infty, a] = \{ \dots \dots \dots \}$

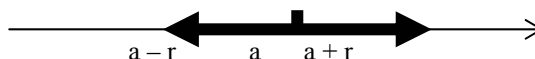
8 - $(-\infty, a) = \{ \dots \dots \dots \}$

9 - $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Entornos.

1 - Sean a y r , $a \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}^+$; definimos **entorno de centro a y radio r** al intervalo $(a - r, a + r)$.

Anotamos: $E_{a,r} = (a - r, a + r)$



Propiedad:
 Sea $x \in \mathbb{R}$; $x \in E_{a,r} \iff a - r < x < a + r \iff -r < x - a < r \iff |x - a| < r$

Ejemplo:

$E_{3,2} = (1, 5)$

Para todo real x , $x \in E_{3,2}$ se cumple: $|x - 3| < 2$. (Ver rep. graf.)

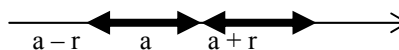
2 - En algunos casos no nos va a interesar considerar el centro del entorno.

Llamamos **entorno reducido de centro a y radio r** al conjunto:

$E_{a,r} - \{ a \}$

Anotamos:

$E_{a,r}^* = (a - r, a + r) - \{ a \}$



Ejercicio.

1 - Indicar si las proposiciones son verdaderas ó falsas.

a) $x \in E_{2;0,5} \implies 1,5 < x < 2,5$

b) $x \in E_{2;0,5}^+ \implies x - 2 < 1/2$

c) $x \in E_{4;2}^* \implies 2 < x < 6$

2 - Dados los reales 1 y 2 , ¿existe un real $r / E_{1,r} \cap E_{2,r} = \emptyset$?

3 - Hallar $E_{2,1} \cap E_{2;0,5}$