

## 2 - CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Una fábrica puede producir hasta 2000 metros de alambre galvanizado por día.  
 Su costo es de \$U 20 por metro cuando se producen hasta 1000 metros.  
 Cuando la producción supera los 1000 metros, el alambre que se produce por sobre dicha cantidad cuesta 5% menos por metro.  
 La función que expresa el costo C por "x" metros de alambre producidos es:

$$C(x) = \begin{cases} 20x & \text{si } 0 \leq x \leq 1000 \\ 20000 + 19(x - 1000) & \text{si } 1000 < x \leq 2000 \end{cases}$$

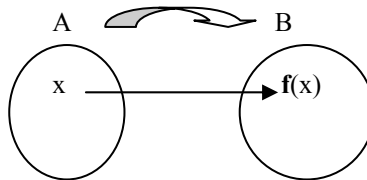
Dominio de C:  $[0; 2000]$  y codominio de C:  $\mathbb{R}^+$

Representaremos gráficamente la función C.

**Definición:** Sean A y B dos conjuntos no vacíos.

Una función (**f**) de dominio A y codominio B es una relación de A en B, que le hace corresponder a todo elemento del dominio un **único** elemento del codominio.

Anotamos:  $f: A \longrightarrow B$



$f(x)$  es la imagen de  $x$  por  $f$ .

### Recorrido de f

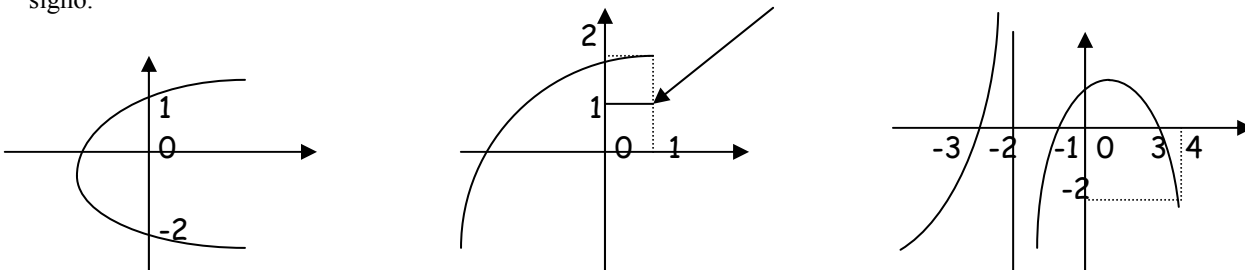
Es el conjunto de elementos del codominio que son imagen de al menos un elemento del dominio.

$$\text{Rec}(f) = \{ y \in B / \exists x \in A \text{ con } f(x) = y \}$$

En nuestro ejemplo:  $\text{Rec}(C) = [0; 39000]$

### **EJERCICIO**

Indicar si los siguientes gráficos corresponden a funciones y en el caso afirmativo determinar dominio, hallar ceros y estudiar signo.



## Funciones Reales

Durante el curso con funciones cuyo dominio y codominio son conjuntos de números reales a las que llamaremos **funciones reales**.  
Por ejemplo:

$$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = 1/x$$

se escribe usualmente:

$$f: f(x) = 1/x$$

Al no estar indicado el dominio sobreentendemos que esta formado por todos los reales para los cuales  $1/x$  es un número real.

Por ejemplo:  $f: \mathbb{R} - \{2,3,-3\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x^2-9}$

se anota

$$f: f(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x^2-9}$$

EJERCICIO: Explicita el dominio de las siguientes funciones reales:

- i)  $f: f(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x}$
- ii)  $g: g(x) = \sqrt{x-2}$
- iii)  $h: h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-3}$

## Operaciones con funciones

### Suma

Consideremos las funciones  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:  $A \cap B \neq \emptyset$ .

Definimos la función  $(f+g)$  de dominio  $A \cap B$  y codominio los reales

De la siguiente forma:  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ .

Ejemplo: Define la función suma en este caso:

$$f: f(x) = \sqrt{x-2} \quad \text{y} \quad g: g(x) = \sqrt{8-2x}$$

De la misma manera podemos definir el **producto**  $f \cdot g$  y el **cociente**  $f/g$  aunque en este caso se debe agregar una condición al dominio de  $f/g$  ya que debe ser  $g(x) \neq 0$ .

## COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Sean las funciones así definidas:  $f: A \rightarrow B / f(x) = x + 1$ ;  $g: C \rightarrow D / g(x) = 2x$

Los conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son los siguientes:  $A = \{1,2,3,4\}$ ,  $B = \{2,3,4,5\}$ ,  
 $C = \{3,4,5,6,7,8\}$  y  $D = \{6,8,10,12,14,16\}$

1) Si diagramamos  $f$  y  $g$  obtenemos:



2) Ahora consideremos una función que llamaremos  $h$ .

La imagen de un elemento  $x$  del conjunto  $A$  al aplicarle la función  $h$ , se halla de la siguiente forma:

- Primero hallamos la imagen del número  $x$  al aplicarle la función  $f$ , o sea  $f(x)$ .
- Finalmente hallamos la imagen de  $f(x)$  al aplicarle la función  $g$ , el número obtenido es la imagen de  $x$  al aplicarle la función  $h$ .

Por ejemplo: 
$$\left. \begin{array}{l} 1) f(2) = 3 \\ 2) g(3) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow h(2) = 6$$

3) Determine la función  $h$  mediante un esquema:  $h : A' \rightarrow D$

$$\begin{array}{l} A' \quad D \\ 2 \rightarrow 6 \\ 3 \rightarrow 8 \\ 4 \rightarrow 10 \\ \quad 12 \\ \quad 14 \end{array}$$

Se intentará llegar a las siguientes conclusiones:

- A esta función en la cual la imagen de 2 es 6, la llamaremos **función compuesta** ( $g \circ f$ ).
  - El dominio de  $g \circ f$  es  $A' = \{2, 3, 4\}$ , son los elementos de  $A$  cuyas imágenes por  $f$  pertenecen al dominio de  $g$ .
- Por la forma en que definimos la función, la imagen de un elemento  $x$  del conjunto  $A'$  la hallamos aplicando  $f$  a  $x$  y luego  $g$  a  $f(x)$ , es decir:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

- Resumiendo:  $(g \circ f) : A' \rightarrow D / (g \circ f)(x) = g(f(x))$

**Definición:** Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : C \rightarrow D$

$$A' = \{x / x \in A \wedge f(x) \in C\}; \text{ con } A' \text{ no vacío.}$$

La función compuesta la definimos así:

$$(g \circ f) : A' \longrightarrow D / (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

**Ejemplo 1:**

$$\begin{array}{l} \text{Sean } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = x + 1 \\ \quad g: \mathbb{R} - \{5\} \longrightarrow \mathbb{R} / g(x) = 1/(x - 5) \end{array}$$

Definiremos  $g \circ f$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = -1/3$$

En general:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \frac{1}{(x + 1) - 5} = 1/(x - 4)$$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$g \circ f : \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R} / (g \circ f)(x) = 1/(x - 4)$$

Definir  $f \circ g$

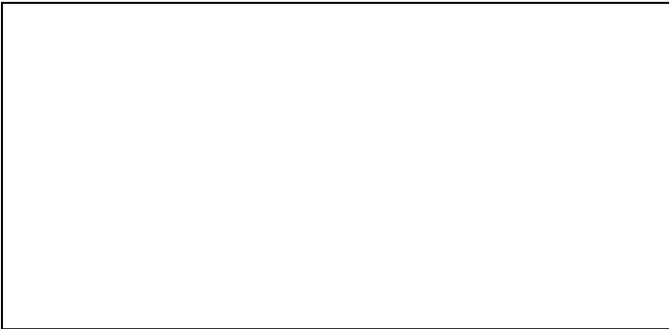
**Ejercicio.**

$$\begin{array}{l} \text{Sean} \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = x + 1 \\ \quad \quad g: \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R} / g(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Hallar  $g \circ f$  y  $f \circ g$ .

INTERPRETACIÓN INTUITIVA DE UN GRÁFICO.

La siguiente es la gráfica de una función  $f$ .



- a)  $D(f) = (-\infty, 4) \cup (4, 8]$
- b) Signo de  $f$ .
- c) Crecimiento y decrecimiento de la función.
- d) Máximos y mínimos relativos.
- e) Recorrido de  $f$ .
  
- f) Cuando  $x$  se “aproxima” a 2,  $f(x)$  se “aproxima” a  $-1$ .  
Decimos que el límite de  $f(x)$  si  $x$  tiende a 2 es  $-1$ .  
Anotamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

Determine los límites de  $f$  cuando  $x$  tiende a 3 y 4.

- g) Si  $x \rightarrow 8$  y  $x < 8$  entonces  $f(x) \rightarrow 5/2$ .

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 5/2$$

- h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- i) Cuando  $x$  tiende a  $-\infty$  la gráfica se “aproxima”, es “casi” la recta  $(r)$ .  
Esta recta se denomina asíntota de la gráfica de  $f$  cuando  $x \rightarrow -\infty$

Mostrar como brindar la información de las partes c y d en un eje.