MATRICES

INTRODUCCIÓN

Observemos el siguiente ejemplo:
Tabla de notas de tres alumnos en el primer bimestre:

------------------	Matemática	Física	Química	Biología
Ana	6	4	5	8
Antonio	5	7	5	5
Beatriz	5	6	7	4

La tabla anterior nos permite ordenar datos de un grupo de tal manera que al leerlos sepamos de quien es ese dato, por ejemplo notas.

- ¿Se te ocurre alguna otra situación donde puedas utilizar la idea anterior, por ejemplo pensando en informática?.

DEFINICIÓN

Dados dos conjuntos de naturales no nulos: $F = \{1,...,m\}$ (filas) y $C = \{1,...,n\}$ (columnas), llamamos **matriz de dimensión mxn** a toda función $F \times C \to R$.

Notación: $A_{m\times n}, A = (a_{ij})_{m\times n}, M_{m\times n}$

Ejemplo: En la matriz $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 4 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ $a_{21} = ...$ $a_{32} = ...$ $a_{22} = ...$

Definiciones: Llamamos

matriz cuadrada a la matriz con el mismo número de filas que de columnas (A_n) (matriz de orden *n*)

matriz diagonal a la matriz cuadrada cuyos elementos son 0 excepto los de su diagonal principal: $A = (a_{ij})_{n\times n} / a_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ x \neq 0, i = j \end{cases} \forall i, j \in \{1,...,n\}$

matriz identidad a la matriz diagonal cuyos elementos no nulos son 1 $I = (a_{ij})_{n\times n} / a_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \forall i, j \in \{1,...,n\}$

matriz nula a la matriz con todos sus elementos iguales a 0. Notación: $0_{m\times n}$ es la matriz nula de m filas y n columnas.

OPERACIONES CON MATRICES

Adición:

$$Ej.: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} =$$

$+ : M_{m\times n} \times M_{m\times n} \to M_{m\times n} / A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$, donde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i \in \{1,...m\} \forall j \in \{1,..n\}$

Producto de un número por una matriz

ej. : $5 \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$

Sea la matriz $A_{m\times n}$, donde $A = (a_{ij})$ y $\alpha \in R$, entonces $\alpha.A$ es una matriz $m \times n$ / $\alpha.A = (\alpha.a_{i\times j})$

Producto de matrices

ej. : $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 4} =$

$\bullet : M_{m\times p} \times M_{p\times n} \to M_{m\times n} \,/\, A_{m\times p} \bullet B_{p\times n} = C_{m\times n}$ donde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{ip}.b_{pj}, \forall i \in \{1,...m\} \, \forall j \in \{1,..n\}$

- ¿Cumple la propiedad conmutativa?, Justifica tu respuesta.

Definiciones:

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, llamamos

matriz transpuesta de A a: $A^t = (a'_{ij})_{n\times m} \,/\, a'_{ij} = a_{ji}$

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$, decimos que

A es **Simétrica** $\Leftrightarrow A^t = A$ A es **Antisimétrica** $\Leftrightarrow A^t + A = O$ A es **Ortogonal** $\Leftrightarrow A^t \bullet A = I$ La **inversa de** A es $A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} \bullet A = I$

Ej. : Hallemos la traspuesta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Busquemos un ejemplo de una matriz simétrica

Veamos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica y que $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} senx & -\cos x \\ \cos x & senx \end{pmatrix}$ son ortogonales.

Hallemos las inversas de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ y de $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$.

DETERMINANTES

DEFINICIÓN

Llamamos **matriz menor complementaria** o **matriz complementaria** del elemento a_{hk} de una matriz A cuadrada de orden mayor a 1,a la matriz que se obtiene al eliminar en A la fila h y la columna k $\left(M_{hk}\right)$

ej. : $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&4&5\\6&8&9\end{pmatrix}$ entonces $M_{21} =$ $M_{33} =$

Llamamos **determinante** de una matriz cuadrada A de orden n $\left(\left|A_n\right|\right)$ al NÚMERO REAL que se calcula:

$$\left|A_n\right| = \begin{cases} a_{11}, n=1 \\ a_{11}(-1)^{1+1}\left|M_{11}\right| + a_{21}(-1)^{2+1}\left|M_{21}\right| + ... + a_{n1}(-1)^{n+1}\left|M_{n1}\right|, n>1 \end{cases}$$

Observaciones:

Determinante de orden 2:

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ entonces $|A| =$

Determinante de orden 3:

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ entonces $|A| =$

Regla de Sarrus (determinantes de orden 3)

Determinante de orden mayor a 3

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&3\\2&7&0&0\\1&2&0&6\\0&0&4&5\end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

Observación: todo lo enunciado para ***filas*** se cumple para ***columnas***

1. Si todos los elementos de una fila de una matriz cuadrada son multiplicados por un real k, entonces su determinante queda multiplicado por ese real k.

2. **PRODUCTO DE DETERMINANTES**
   El determinante de un producto es el producto de los determinantes de los factores.

3. **DETERMINANTES NULOS**
   El determinante de una matriz cuadrada es 0 cuando:
   _ tiene una fila de ceros,
   _ tiene dos filas iguales,
   _ tiene dos filas proporcionales,
   _ tiene una fila que es combinación lineal de otras dos.

4. **DETERMINANTE OPUESTO**
   El determinante de una matriz cuadrada cambia de signo, al intercambiar dos filas.

5. **DETERMINANTE INVARIANTE**
   El determinante de una matriz cuadrada no cambia cuando:
   _ se le suman, a los elementos de una fila, los elementos de otra multiplicada por un real,
   _ se calcula el determinante de la matriz transpuesta,
   _ se desarrolla por adjuntos utilizando cualquier fila.

Ejercicios:

1. Calcula aplicando propiedades:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 3 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & -6 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Demuestra que los siguientes determinantes son nulos sin desarrollarlos:

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 16 \\ 12 & 4 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a & b+2c & c-a \\ a-b & b+3c & c-3a \end{vmatrix}$$

<u>MATRIZ INVERSA</u>
Veremos a continuación otra forma de calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada.

Definiciones: Dada una matriz cuadrada A de orden n, llamamos

menor complementario de a_{hk} al determinante de la matriz complementaria de a_{hk}
Adjunto de a_{hk} al número $(-1)^{h+k}|M_{hk}|$
Matriz adjunta de A a la matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de A (en el mismo orden)

Existencia de la matriz inversa

Teorema: Si $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} / A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$

Unicidad de la matriz inversa
Teorema: La matriz inversa de A, en caso de existir, es única

Ej. : Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

MATRICES y SISTEMAS
Definiciones:

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas expresado: $S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$,

llamamos

matriz del sistema *S* a la matriz $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

matriz de las incógnitas a $X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

matriz de los términos independientes a $B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

Observación:

Forma matricial de expresar un sistema: $A_n X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$

MÉTODO DE CRAMER

Vamos a conocer un método para resolver sistemas de ecuaciones que se caracteriza por la rapidez con la que podemos saber si un sistema tiene o no solución sin necesidad de resolverlo.

Sea el sistema $S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

representado en forma matricial como $A_n X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$ y que cumple que $\boxed{|A| \neq 0}$ entonces existe A^{-1} entonces:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow I.X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Desarrollando y efectuando operaciones podemos probar lo siguiente:

En general :

Dado el sistema $AX = B$:

El sistema es **compatible determinado** (conjunto solución unitario) $\Leftrightarrow |A| = \Delta \neq 0$ y $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$

Observación: En caso que $|A| = \Delta = 0$, el sistema será incompatible (conjunto solución vacío) o compatible indeterminado (conjunto solución con infinitos elementos).

Ejemplo: Resolvamos por este método el siguiente sistema: $\begin{cases} x - 2y - 3z = -8 \\ 4x + y - z = -1 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$

Ejemplo: Resolvamos el siguiente sistema, discutiendo según $m \in R$

$$\begin{cases} mx + 3y = m \\ 3x + my = -m \end{cases}$$