

Infinitos. Infinitos equivalentes. Ordenes de infinitos

□ Algunas definiciones y resultados útiles

I. $f(x)$ es un infinito cuando $x \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm\infty$

II. Dos infinitos $f(x)$ y $g(x)$ cuando $x \rightarrow \alpha$ son equivalentes $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

III. Sean dos infinitos $f(x)$ y $g(x)$ cuando $x \rightarrow \alpha$

A)

i) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow$ Orden de $f(x)$ es menor que el orden de $g(x)$.

ii) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \Leftrightarrow$ Orden de $f(x)$ es mayor que el orden de $g(x)$.

iii) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0 \Leftrightarrow$ Orden de $f(x)$ es igual que el orden de $g(x)$.

B) $Ord[f(x)] > Ord[g(x)] \Rightarrow f(x) + g(x) \sim f(x)$

IV.

$$Ord[L^m(u)] < Ord[u^p] < Ord[a^u] < Ord[u^{ku}]$$

$$u \rightarrow +\infty; m > 0; p > 0; a > 1; k > 0$$

- V. Todo factor de una expresión se puede sustituir por un factor equivalente, sin que esto altere el límite de la expresión.
- VI. La propiedad anterior es válida también para divisores.
- VII. Puedes sustituir un factor o divisor por su límite, siempre y cuando, éste no sea nulo.

Ejemplos:

1) Calcularemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(x^5) - 2x}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x} = 0^-$$

2) Probar que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitos equivalentes

para $x \rightarrow +\infty$, siendo:

$$f(x) = L(e^{5x})$$

$$g(x) = 5x + L(x)$$

Límites Tipos. Infinitésimos equivalentes. Ordenes de Infinitésimos.

□ Algunas definiciones y resultados útiles

I. $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0$

II. Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ cuando $x \rightarrow \alpha$ son equivalentes $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

- III. Todo factor de una expresión se puede sustituir por un factor equivalente, sin que esto altere el límite de la expresión.
- IV. La propiedad anterior es válida también para divisores.
- V. Puedes sustituir un factor o divisor por su límite, siempre y cuando, éste no sea nulo.

LÍMITES TIPO : Infinitésimos equivalentes	
<p><u>Con $u \rightarrow 0$</u> $a^u - 1 \sim u \cdot L a$ $e^u - 1 \sim u$ $\text{sen}(u) \sim u$ $\text{tg}(u) \sim u$ $1 - \cos(u) \sim \frac{1}{2} u^2$ $\cos(u) - 1 \sim -\frac{1}{2} u^2$ $\text{Arcsen}(u) \sim u$ $\text{Arctg}(u) \sim u$ $L(u+1) \sim u$</p>	<p><u>Con $u \rightarrow 1$</u> $L(u) \sim u - 1$ $u^n - 1 \sim n \cdot (u - 1)$ $\sqrt[n]{u} - 1 \sim \frac{1}{n}(u - 1)$</p>
	<p><u>Tener en cuenta:</u> $e^u - e^v = e^v(e^{u-v} - 1)$ $a^u - a^v = a^v(a^{u-v} - 1),$ $L u - L v = L(u/v)$</p>

Recuerda: $e^0 = 1$ $a^0 = 1$ $\text{sen } 0 = 0$ $\cos 0 = 1$
 $\text{tg } 0 = 0$ $L 1 = 0$ $L e = 1$

Ejemplos:

1) Calcularemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{x-1} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(e^{x-1} - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

2) Probar que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes

para $x \rightarrow 0$, siendo: $f(x) = L|\cos x| + \text{sen } x$; $g(x) = x$

¡¡Cuidado con el uso de equivalentes en sumas!!

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^2 - 1)e^{\frac{1}{x^2}} + x\left(\frac{1}{x} - x\right) \right]$

No puedes calcular éste límite sustituyendo cada sumando por su equivalente, debido a que dichos equivalentes son opuestos. El resultado que obtienes **no** es correcto.

Intenta el cálculo efectuando los desarrollos y factorizando de distinta forma.

Ejemplos:

1) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 + x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(Lx)^2 + x}{e^x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 - 5x + 2)(e^{\frac{2}{x}} - 1)}{(-x^2 + 2)L\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

2) Probar que: e^{x+2} y e^x **no** son infinitos equivalentes cuando $x \rightarrow +\infty$

Cambios de Variable

Se efectúan para que la nueva variable tienda a $+\infty$

$$x \rightarrow \alpha^+ \Rightarrow u = \frac{1}{x - \alpha}$$

$$x \rightarrow \alpha^- \Rightarrow u = \frac{-1}{x - \alpha}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow u = -x$$

Ejemplos: Calcular $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} \sqrt[3]{x^2 - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1)L(x - 1)$