ALGEBRA DE LÍMITES.

Para facilitar el cálculo de límites veremos como se comportan para la suma, el producto y el cociente de funciones.

LÍMITE DE f + g

Teorema 1 H) $\lim_{x\to a} f(x) = b \wedge \lim_{x\to a} g(x) = c$ $\Rightarrow$ T) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = b + c$

Completa: $\lim_{x\to 3}(2x-5) = 1 \wedge \lim_{x\to 3}(5x-1) = 14 \Rightarrow \lim_{x\to 3}(7x-6) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Intuye el siguiente límite.

$\lim_{x\to +\infty}(3x+1) = \ldots\ldots\ldots\ldots \wedge \lim_{x\to +\infty}(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}(x^2+3x+4) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Teorema 2 H) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ $\Rightarrow$ T) $\lim_{x\to +\infty}\left[f(x)+g(x)\right] = +\infty$

Analizaremos a continuación el caso en que una función tiende a $+\infty$ y la otra a $-\infty$.

Intuye el límite de f(x) + g(x) en los siguientes casos:

1) $\lim_{x\to +\infty}(3x) = \ldots\ldots$, $\lim_{x\to +\infty}(-x) = \ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}(3x+(-x)) = \ldots\ldots$

2) $\lim_{x\to +\infty}(3x) = \ldots\ldots$, $\lim_{x\to +\infty}(-4x) = \ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}(3x+(-4x)) = \ldots\ldots$

3) $\lim_{x\to +\infty}(3x+1) = \ldots\ldots \wedge \lim_{x\to +\infty}(-3x+3) = \ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}((3x+1)+(-3x+3)) = \ldots\ldots$

¿Obtenemos siempre el mismo resultado para $\lim_{x\to +\infty}(f(x)+g(x))$?

> Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$ no podemos determinar si existe y cual es el valor de $\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))$.

> **Notación:**
> $x \to \alpha$, significa que : $x \to \begin{cases} a \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

Decimos que este caso es una **indeterminación**, es decir que el límite debe ser calculado expresamente según las funciones que intervengan. Resumiremos algunos resultados en la siguiente tabla.

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))$
b	c	b + c
b	$+\infty$	
b	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	Indeterminado

LÍMITE f . g

Trata de determinar los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 1} 3x+1 = \ldots\ldots$, $\lim_{x\to 1} 2x-5 = \ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to 1}(3x+1).(2x-5) = \ldots\ldots$

2) $\lim_{x\to +\infty} x^2 = \ldots\ldots\ldots$, $\lim_{x\to +\infty} x = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}(x^2.x) = \ldots\ldots\ldots$

3) $\lim_{x\to +\infty} x^2 = \ldots\ldots\ldots$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} x^2.\frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots$

4) $\lim_{x\to +\infty} x = \ldots\ldots\ldots$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} x.\frac{1}{x^2} = \ldots\ldots\ldots$

5) $\lim_{x\to +\infty} x = \ldots\ldots\ldots \wedge \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} x.\frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots$

A partir del ejercicio anterior y de tu intuición completa la siguiente tabla:

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x).g(x))$
b	c	
$b\neq 0$	$+\infty$	
$b\neq 0$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
0	$+\infty$	Indeterminado.
0	$-\infty$	Indeterminado.

LÍMITE DE 1/ f

Si conocemos $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, entonces en general podemos calcular $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$. Busca ejemplos y completa:

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$.
$b\neq 0$	
0^+	
0^-	
$+\infty$	
$-\infty$	

LÍMITE DE f/g

Recordando que: **f/g = f . 1/g** podemos usar las dos tablas anteriores para completar la siguiente tabla referida al límite de **f/g**.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{g(x)}$	$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
b	$c\neq 0$		
$b>0$	$0^{\pm}$		
$b>0$	$\pm\infty$		
$\pm\infty$	$c\neq 0$		
$\pm\infty$	$0^{\pm}$		
$\pm\infty$	$\pm\infty$		
0	$c\neq 0$		
0	$\pm\infty$		
0	$0^{\pm}$	$\pm\infty$	Indeterminado.

Ejemplos de cálculo de límites.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-1}{x-4}=\dfrac{17}{-1}=-17$; $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x-1)=3^2+3.3-1=17$; $\lim\limits_{x\to 3}(x-4)=3-4=-1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x^3}=$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3.(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^2.(1+\frac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x.(.....)}{(.....)}=+\infty$ (justifique).

4) Calcula los siguientes límites utilizando el mismo procedimiento.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^4+2x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2-x}$$

Enunciaremos el siguiente teorema.

TEOREMA	
H) f y g son dos funciones polinómicas de grados n y h respectivamente.	T) si n > h lím....
$f(x) = a_n x^n + \ ....$	n < h lím....
$g(x) = b_h x^h + \ ....$	n = h lím....

2) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+5x-7}$; si tratamos de calcular este límite veremos que es un caso de indeterminación.

Procederemos así: $\lim_{x\to1}(x^2-3x+2) = 0 \Rightarrow$ $p(x) = x^2 - 3x + 2$ tiene raíz 1.

$\lim_{x\to1}(2x^2+5x-7) = 0 \Rightarrow$ $q(x) = 2x^2 + 5x - 7$ tiene raíz 1.

Podemos factorizar p(x) y q(x) y escribir: $\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+5x-7} =$ ....

Límites de la función exponencial y de la función logarítmica.

Teniendo en cuenta las gráficas de f: $f(x) = e^x$ y g: $g(x) = Lx$ indica los siguientes límites:

1) a) $\lim_{x\to0} e^x =$ ...... b) $\lim_{x\to a} e^x =$ ...... c) $\lim_{x\to+\infty} e^x =$ .... d) $\lim_{x\to-\infty} e^x =$ .....

2) a) $\lim_{x\to1} Lx =$ ..... b) $\lim_{x\to a} Lx =$ ..... c) $\lim_{x\to0^+} Lx =$ ..... d) $\lim_{x\to+\infty} Lx =$ .....

Completa l siguiente tabla:

$\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim_{x\to\alpha} L(g(x))$	$\lim_{x\to\alpha} L\lvert g(x)\rvert$	$\lim_{x\to\alpha} e^{g(x)}$
0^+			
0^-			
1			
a>1			
0<a<1			
$+\infty$			
$-\infty$			
a<0			

EJERCICIO. Calcular los siguientes límites.

1) $\lim_{x\to1}(x+2).e^{x+1} =$ 2) $\lim_{x\to+\infty}(x+2).e^{x+3} =$ 3) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}.e^x =$

4) $\lim_{x\to1}(x+2).Lx =$ 5) $\lim_{x\to1} \dfrac{1}{x}.L(\dfrac{x+2}{x+3}) =$ 6) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{(x^2+3)}{x}.L(x^2+2) =$

Nota: Para poder calcular algunos límites, vamos a admitir que las propiedades que hemos probado para $x \to \alpha$, son válidas para $f(x) \to \alpha$.