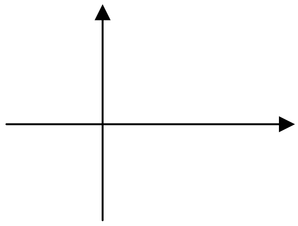
LÍMITES DE UNA FUNCIÓN.

Introducción:

Representar graficamente la siguiente función.

$$f: R \longrightarrow R \;/\; f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$



Complete la tabla.

x	f(x)
2,9	
2,999	
2,9999	
3,1	
3,01	
3,001	
3	

- Observemos que podemos tener imágenes tan "cerca" de 1 como queramos, si tomamos valores de x lo suficientemente cercanos a 3, con $x \neq 3$.
- Decimos entonces que el "**Límite de f(x) con x tendiendo a 3 es 1**".
- Anotamos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

Las expresiones cerca o se aproxima que usamos hasta ahora, no tienen sentido en Matemática, para dar sentido preciso a esas expresiones debemos definir formalmente ***Límite***.

Retomamos el ejemplo para llegar a ella.

- ♦ Consideremos imágenes de la función f entre 0,5 y 1,5. Determinaremos valores de $x \in D(f)$, $x \neq 3$ tal que $f(x) \in (0{,}5 ; 1{,}5)$

  El siguiente desarrollo analítico me permite determinar el conjunto buscado

  $0{,}5 < f(x) < 1{,}5$

  $0{,}5 < 2x - 5 < 1{,}5$

  $5{,}5 < 2x < 6{,}5$

  $2{,}75 < x < 3{,}25$

  $3 - 0{,}25 < x < 3 + 0{,}25$, con $x \neq 3$

  Así que: Si $x \in E^*_{3;\,0,25} \Rightarrow f(x) \in E_{1;\,0,5}$
- ♦ De igual forma podríamos considerar imágenes de f entre 0,9 y 1,1 y concluir que:

  Si $x \in E^*_{3;0,05} \Rightarrow f(x) \in E_{1;\,0,1}$

- ♦ En general podemos tomar un n° real $\varepsilon > 0$ cualquiera, considerar imágenes $f(x) \,/\, 1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$ y determinar los valores de $x \in D(f)$, $x \neq 3$ tal que $f(x) \in (1 - \varepsilon ; 1 + \varepsilon)$

  Para ello planteamos: ....

A partir del desarrollo anterior encontramos que: Si $x \in E^*_{3;\,\varepsilon/2} \Rightarrow f(x) \in E_{1;\,\varepsilon}$

Si llamamos δ al radio ε/2, entonces, pudimos hallar un δ positivo tal que si $x \neq 3$ y $3 - \delta < x < 3 + \delta$, se cumple que, $1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon$.
Recordemos que el ε elegido puede ser cualquiera.

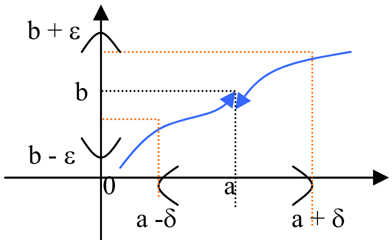
- Usando notación de entornos: $(\forall\, \mathbf{E_{1;\,\varepsilon}})\, ,\ \exists\, \mathbf{E^*_{3;\,\delta}}$ **/ si** $\mathbf{x \in E^*_{3;\,\delta} \Rightarrow f(x) \in E_{1;\,\varepsilon}}$

Si se cumple la proposición anterior, podemos afirmar que: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

<u>*Importante*</u>: f(3) no tiene porque coincidir con el límite en cuestión, puede existir el límite y no existir f(3).

<u>*DEFINICIÓN DE LÍMITE.*</u>

Sea f una función real, a y b reales.



i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, E_{b;\,\varepsilon}\ ,\ \exists\ E^*_{a;\,\delta}\ /\ \text{si } x \in E^*_{a;\,\delta} \Rightarrow f(x) \in E_{b;\,\varepsilon}$.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ ,\ \exists\,\delta\ /\ \text{si } x \neq a \text{ y } a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ ,\ \exists\,\delta\ /\ \text{si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

<u>*Ejercicio*</u> Prueba mediante la definición de límite que: $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+9) = 3$ y $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{2}\right) = 2$

EJERCICIO
Consideremos la función f:f(x) = 3x – 5.

- Representa graficamente.
- Determina los límites de la función con x tendiendo a 2 y a 1.
- Encuentra un entorno de centro 2, para el cual todos sus elementos tengan imagen positiva.
- Encuentra un entorno de centro 1, para el cual todos sus elementos tengan imagen negativa.

Estas ideas nos sirven para plantear el siguiente teorema.

<u>*TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DEL SIGNO*</u>.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\ ,\ b \neq 0 \Rightarrow \exists\, E^*_{a;\,\delta}\ /\ \forall x \in E^*_{a;\,\delta}\ ,\ \text{sig}[f(x)] = \text{sig}(b)$.

Demostración: i) Supongamos que b > 0

ii) Ahora si b < 0

Por i) y ii) concluimos la tesis.

LÍMITES LATERALES

Se considera f:f(x) = $\begin{cases} x+1 & \text{si } x<2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- Representa graficamente.
- ¿Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?
- ¿Qué pasa si $x \to 2$ y $x > 2$? (Anotamos $x \to 2^+$, se lee x tiende a 2 por derecha)
- ¿Qué pasa si $x \to 2$ y $x < 2$? (Anotamos $x \to 2^-$, se lee x tiende a 2 por izquierda)

Decimos que: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$

Observación: Si existen ambos límites laterales y son iguales entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y coincide con ellos.

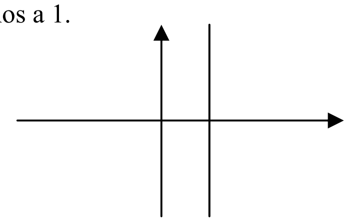
Ejercicio.

Sea f:f(x) = $\begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \leq 3 \\ x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ ¿Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

LÍMITES INFINITOS PARA x TENDIENDO A **a**.

Veamos el comportamiento de f:f(x) = $1/(x-1)^2$ al aproximarnos a 1.

x	f(x)
0,99	
0,999	
1,01	
1,0001	



i) Mientras más próximos sean los valores de x a 1, las imágenes f(x) mayores son.

ii) Por eso podemos afirmar que: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$

Representaremos graficamente:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

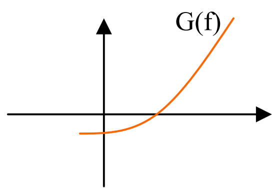
LÍMITES DE UNA FUNCIÓN PARA x TENDIENDO A + ∞ (-∞).

Analizaremos los distintos casos en forma gráfica.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ 2) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$

3) Dado un cuadrado de lado x su área es x^2 ; podemos escribir: $A(x) = x^2$. A mayor valor de x, mayoe es el área A(x).

Podemos decir entonces que: $\lim\limits_{x\to +\infty} A(x) = +\infty$



Realiza los gráficos de cada límite:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$