CÁLCULO DE DERIVADAS

A partir de la definición, determinaremos fórmulas que nos permitirán calcular derivadas de distintas funciones.

1) $Sea \quad f: f(x) = k \quad \text{con} \quad k \in R \Rightarrow f': f'(x) = 0.$

Demostración: Debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{k - k}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} = 0$$

Así que: f es derivable en a y f´(a)=0, $\forall$a $\in$ R $\Rightarrow$ f´: f´(x) = 0

2) $Sea \quad f: f(x) = k.x \quad \text{con} \quad k \in R \Rightarrow f': f'(x) = k.$

Demostración: Debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Así que: f es derivable en a y f´(a)= .......... , $\forall$a $\in$ R $\Rightarrow$ f´:f´(x) = ...........

3) $Sea \quad f: f(x) = x^3 \Rightarrow f': f'(x) = 3x^2.$

Demostración: Debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Así que: f es derivable en a y f´(a)= .......... , $\forall$a $\in$ R $\Rightarrow$ f´:f´(x) = ...........

4) $Sea \quad \left. \begin{array}{l} f: f(x) = \sqrt{x} \\ D(f) = R_0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f': f'(x) = \dfrac{1}{2.\sqrt{x}} \\ D(f') = R^+ \end{array} \right.$

Demostración: Debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Así que: f es derivable en a y f´(a)= .......... , $\forall$a > 0 $\Rightarrow$ f´:f´(x) = ...........

5) $Sea \quad f: f(x) = e^x \quad \Rightarrow f': f'(x) = e^x.$

Demostración: Debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Así que: f es derivable en a y f´(a)= .......... , $\forall$a $\in$ R $\Rightarrow$ f´:f´(x) = ...........

6) $Sea \quad \left. \begin{array}{l} f: f(x) = Lx \\ D(f) = R^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f': f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ D(f') = R^+ \end{array} \right.$

Demostración: Debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Así que: f es derivable en a y f´(a)= .......... , $\forall$a$\in$R$^+$ $\Rightarrow$ f´:f´(x) = ...........

EJERCICIOS: Calcula aplicando la definición de derivada.

1) $f'(3)$ si $f: f(x) = x^3 + 2x$

2) $f'(-2)$ si $f: f(x) = e^{-x^2+1}$

## ALGEBRA DE DERIVADAS

1) DERIVADA DE (f +g)

f y g funciones derivables en x = a $\Rightarrow \begin{cases} \text{i) } (f+g) \text{ es derivable en } x = a \\ \text{ii) } (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \end{cases}$

Función derivada (f + g)´:

(f + g)´(x) = f´(x) + g´(x)   cuyo dominio es D(f´) $\cap$ D(g´)

EJERCICIO  Determina f´en los siguientes casos a) f:f(x) = $x^2 + 2x - 12$ ; b) g:g(x) = $e^x - Lx + x^3$

2) DERIVADA DE (f .g)

f y g funciones derivables en x = a $\Rightarrow \begin{cases} \text{i) } (f.\,g) \text{ es derivable en } x = a \\ \text{ii) } (f\,.\,g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a) \end{cases}$

Función derivada (f . g)´:

(f. g)´(x) = f´(x).g(x) + f(x).g´(x)   cuyo dominio es D(f´) $\cap$ D(g´)

EJERCICIOS  1) Determina f´ en los siguientes casos a) f:f(x) = (x + 2).$e^x$ ; b) g:g(x) = 2. Lx

2) Considera g:g(x) = k.f(x), siendo k$\in$R y f una función real.

i) Prueba que g´(x) = k .f´(x)

ii) Calcula g´(x) si g(x) = $4x^3 + 2x^2 - 3x$

3) DERIVADA DE ( $\frac{f}{g}$ )

$\left.\begin{array}{l} \text{f y g funciones derivables en } x = a \\ g(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } (f\,/\,g) \text{ es derivable en } x = a \\ \text{ii) } \left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{\left[g(a)\right]^2} \end{cases}$

Función derivada (f / g)´:

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$ cuyo dominio es D(f´) $\cap$ D(g´) $-\{x \in R \,/\, g(x) = 0\}$

EJERCICIOS  1) Determina f´en los siguientes casos a) $f : f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$ ; b) $g : g(x) = \dfrac{Lx}{2x^2+2}$ ;

c) $h : h(x) = \dfrac{-x+1}{x^2}$ ;  d) $m : m(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$

2) Considera $g : g(x) = \dfrac{k}{f(x)}$, siendo k$\in$R y f una función real.

i) Prueba que $g'(x) = \dfrac{-k.f'(x)}{f^2(x)}$ ;  ii) Calcula g´(x) si $g(x) = \dfrac{1}{1+3x}$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

Consideremos la función compuesta $h : R^+ \rightarrow R \,/\, h(x) = L(x^3)$

Se podría pensar que: $h' : R^+ \rightarrow R \,/\, h'(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ; pero observemos que L($x^3$)=3L(x), por lo tanto

$h'(x) = 3.\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{x}; \forall x \in R^+$ . a continuación presentamos el teorema que nos permite efectuar el cálculo de dicha derivada.

TEOREMA

$\left.\begin{array}{l} f \text{ derivable en } a \\ \text{g derivable en f}(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (g_\circ f) \text{ es derivable en } a \\ (g_\circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a) \end{cases}$

Consideremos el ejemplo inicial: g:g(x)=Lx y f:f(x)=$x^3$

$g'(x)=\frac{1}{x}$ y f´(x)=3$x^2$ ; $g'(f(x))=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^3}$

Aplicando el teorema:

$$(g_\circ f)'(x)=g'(f(x)).f'(x)=\frac{1}{x^3}.3x^2=\frac{3}{x}$$

EJERCICIO

Determina f´ en cada uno de los siguientes casos:

f:f(x)=$(x^2+3x)^3$ ; f:f(x)= $e^{x^2+2x}$ ; f:f(x)=L($x^2$+4) ; f:f(x)= $\sqrt{x^3}$

RESUMEN

FUNCIONES ELEMENTALES FUNCIONES COMPUESTAS

| f(x) | f´(x) | Dom(f´) | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| k | 0 | R | | $e^u$ | $e^u.u'$ |
| $\boxed{x}$ | 1 | R | | Lu | $\frac{u'}{u}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | R | | $u^n$ | $n.u^{n-1}.u'$ |
| Lx | $\frac{1}{x}$ | $R^+$ | | $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $x^n$ | $n.x^{n-1}$ | R | | $\sqrt[3]{u}$ | $\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $R^+$ | | $\frac{1}{u}$ | $\frac{-u'}{u^2}$ |
| $\sqrt[3]{x}$ | $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ | $R^*$ | | $\frac{1}{u^n}$ | $\frac{-n.u'}{u^{n+1}}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ | $R^*$ | | $L\|u\|$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $\frac{1}{x^n}$ | $\frac{-n}{x^{n+1}}$ | $R^*$ | | ---------------------- | ---------------------- |
| $L\|x\|$ | $\frac{1}{x}$ | $R^*$ | | ---------------------- | --------------------- |

$n \in N^*$

EJERCICIO

Determina f´(x) en cada caso:

a) $f(x)=e^{3x-1}$ b) $f(x)=(3x+2)^6$ c) $f(x)=L|2-3x|$ d) $f(x)=e^{1/x}$ e) $f(x)=L\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$

f) $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$ g) $f(x)=\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $f(x)=(x^2-2x+3)e^{1/x}$