Aplicaciones de la Derivada

Crecimiento y Decrecimiento

Definiciones:

1) f es estrictamente creciente en a $\Leftrightarrow$ $\exists E_a ; E_a \subset D(f) / \forall x \in E_a ; \begin{cases} i) x < a \Rightarrow f(x) < f(a) \\ ii) x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \end{cases}$

2) f es estrictamente decreciente en a $\Leftrightarrow$ $\exists E_a ; E_a \subset D(f) / \forall x \in E_a ; \begin{cases} i) x < a \Rightarrow f(x) > f(a) \\ ii) x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \end{cases}$

Completa las siguientes definiciones:

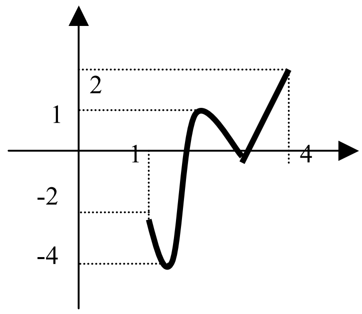
3) f es creciente en a $\Leftrightarrow$ ……………….

4) f es decreciente en a $\Leftrightarrow$ …………….

Máximo y mínimo relativo

Ejercicio:

Sea $f : [1;4] \to R$ según el siguiente gráfico:



Indica máximos y mínimos relativos y absolutos

Definiciones:

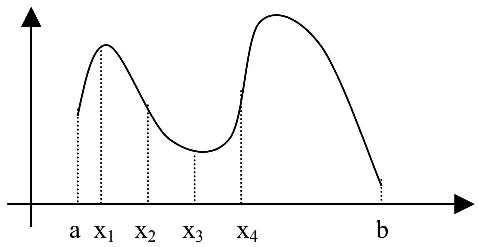
1) a$\in$D(f), f(a) es mínimo relativo de f en a $\Leftrightarrow \exists E_a ; E_a \subset D(f) / \forall x \in E_a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

Completa

2) a$\in$D(f), f(a) es máximo relativo de f en a $\Leftrightarrow$………………………………………….

Monotonía, extremos relativos y derivada de una función

Sea $f : [a;b] \to R; a \in R, b \in R$, según el siguiente gráfico:



Observaciones:

1) $f'(x_1) = f'(x_3) = 0$; f presenta máximo relativo en x_1 y mínimo relativo en x_3.

2) $f'(x_2) < 0$; f es estrictamente decreciente en x_2.

3) $f'(x_4) > 0$; f es estrictamente creciente en x_4.

A partir del ejercicio anterior plantearemos las siguientes proposiciones:

Proposicion1

f es derivable en a; $f'(a) > 0 \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en a.

Proposicion2

f es derivable en a; $f'(a) < 0 \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en a.

Proposicion3

f es derivable en a; f presenta un extremo relativo en a $\Rightarrow$ $f'(a)=0$

Observación: Existen funciones derivables en a, con $f'(a)=0$, pero que no presentan extremo relativo en a. Por ejemplo $f: f(x)=x^3$.

Dos teoremas Importantes:

TEOREMA DE ROLLE

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a;b] \\ f \text{ derivable en } (a;b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) / f'(c)=0$$

Aplicaciones:

1) En caso que f cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en $[-2;2]$, determina el o los valores de c$\in$(-2;2)/ $f'(c)=0$.

i) $f: f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ ii) $f: f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-3}$

2) Determinar en cada caso el "c" del teorema de Rolle, verificando previamente la hipótesis del teorema.

i) $f: f(x)=x^2-6x+8$ en $[1;5]$ ii) $f: f(x)=L(x^2+2)+\dfrac{x^2}{2}$ en $[-1;1]$

TEOREMA DE LAGRANGE

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a;b] \\ f \text{ derivable en } (a;b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) / f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Demostración:

Definamos la función $h: h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

Dicha función h verifica la hipótesis del teorema de Rolle, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \text{h continua en } [a;b] \\ \text{h derivable en } (a;b) \\ h(a)=h(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) / h'(c)=0$$

Como $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, entonces $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

Concluimos que $\exists c \in (a;b) / f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, probando así la tesis.

Aplicación:

Sea $f: f(x)=x^2-4$, determina el "c" de Lagrange en $(0;2)$, verificando previamente la hipótesis del teorema. Representa gráficamente f y la tangente en el punto de abscisa "c".

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EN UN INTERVALO

1) f es estrictamente creciente en (a;b) $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in (a;b);\ si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

2) f es estrictamente decreciente en (a;b) $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in (a;b);\ si\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Proposicion1

f es derivable en (a;b); $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en (a;b).

Proposicion2

f es derivable en (a;b); $f'(x) < 0, \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en (a;b).

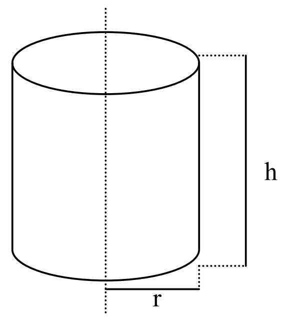
CONDICIÓN SUFICIENTE DE EXISTENCIA DE EXTREMOS RELATIVOS

1) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en a} \\ \exists E_a / \forall x \in E_a; \begin{cases} si\ x < a \Rightarrow f'(x) < 0 \\ si\ x > a \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$ f presenta un mínimo relativo en a.

2) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en a} \\ \exists E_a / \forall x \in E_a; \begin{cases} si\ x < a \Rightarrow f'(x) > 0 \\ si\ x > a \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$ f presenta un máximo relativo en a.

APLICACIONES DE LAS PROPOSICIONES ANTERIORES:

1) Considera un tanque cilíndrico de volumen 330 litros, sin tapa.
   Determina el radio de la base y la altura del tanque para que la superficie exterior sea mínima.



$$\left.\begin{array}{r} V = \pi r^2 h = 0,33 \Rightarrow h = \dfrac{0,33}{\pi r^2} \\ \\ S = 2\pi r h + \pi r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S(r) = \frac{0,66}{r} + \pi r^2$$

Calculemos ahora S´(r) $\qquad S'(r) = \dfrac{2\pi r^3 - 0,66}{r^2}$

Estudiamos a continuación el signo de S´(r)

sig S´(r) $\quad \nexists \; - \; - \; - \; 0 + + + + + +$

$0 \qquad \sqrt[3]{\dfrac{0,66}{2\pi}} = r_m$

Por la condición vista anteriormente, la función S presenta un mínimo relativo en $r = r_m$.

La correspondiente altura h_m, la determinamos sustituyendo r_m en la primera fórmula planteada.

2) Dada la función $f : f(x) = \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$, estudia su dominio, signo, continuidad, comportamiento cuando $x \to +\infty$ y en caso que $x \to -\infty$, derivada de f, determinando máximo y mínimos relativos (si los tiene), efectuando la representación gráfica de f coherente con la información obtenida.

EJERCICIO

Igual que en el ejercicio 2, para las siguientes funciones $h : h(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$; $g : g(x) = \dfrac{1}{x-1} e^{1/x}$