

Problemas

1. Obtén una fórmula para la suma de los n primeros enteros positivos pares.
2. Usa la inducción matemática para demostrar la fórmula que has obtenido en el Problema 1.
3. Usa la inducción matemática para demostrar que $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \dots + 3 \cdot 5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4$ para todo entero no negativo n .
4. Usa la inducción matemática para demostrar que $2 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 + \dots + 2(-7)^n = (1 - (-7)^{n+1})/4$ para todo entero no negativo n .

5. Obtén una fórmula para

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

examinando los valores de esta expresión para valores pequeños de n . Demuestra tu resultado aplicando inducción matemática.

6. Obtén una fórmula para

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

examinando los valores de esta expresión para valores pequeños de n . Demuestra tu resultado aplicando inducción matemática.

7. Demuestra que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo n entero positivo.
8. Demuestra que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$ para todo n entero positivo.
9. Demuestra que $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ para todo n entero no negativo.
10. Demuestra que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ para todo n entero positivo.
- *11. Demuestra utilizando el principio de inducción que si $h > -1$, entonces $1 + nh \leq (1+h)^n$ para todo n entero no negativo. Esta desigualdad se llama **desigualdad de Bernoulli**.
12. Demuestra que $3^n < n!$ para todo n entero mayor que 6.
13. Demuestra que $2^n > n^2$ para todo n entero mayor que 4.
14. Demuestra utilizando el principio de inducción que $n! < n^n$ para todo n entero mayor que 1.
15. Demuestra utilizando el principio de inducción que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$ siempre que n sea un entero positivo.
16. Utiliza el principio de inducción para demostrar que $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)(n+3)/4$.
17. Demuestra que $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}n(n+1)/2$ para n entero positivo.

18. Demuestra que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

siempre que n sea un entero mayor que 1.

19. Demuestra que cualquier franqueo postal mayor de 7 céntimos se puede formar empleando sólo sellos de 3 y 5 céntimos.
20. Demuestra utilizando el principio de inducción que 3 divide a $n^3 + 2n$ si n es un entero no negativo.
21. Demuestra utilizando el principio de inducción que 5 divide a $n^5 - n$ si n es un entero no negativo.
22. Demuestra utilizando el principio de inducción que 6 divide a $n^3 - n$ si n es un entero no negativo.
- *23. Demuestra utilizando el principio de inducción que $n^2 - 1$ es divisible por 8 para todo entero impar positivo n .
24. Demuestra utilizando el principio de inducción que $n^2 - 7n + 12$ es no negativo si n es un entero mayor que 3.
25. Demuestra utilizando el principio de inducción que un conjunto de n elementos tiene $n(n-1)/2$ subconjuntos con exactamente dos elementos si $n \geq 2$.
- *26. Demuestra utilizando el principio de inducción que un conjunto de n elementos tiene $n(n-1)(n-2)/6$ subconjuntos con exactamente tres elementos si $n \geq 3$.
27. Demuestra utilizando el principio de inducción que $\sum_{j=1}^n j^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$ para todo entero positivo n .
28. ¿Para qué enteros no negativos n se cumple que $n^2 \leq n!$? Demuestra tu respuesta por inducción.
29. ¿Para qué enteros no negativos n se cumple que $2n + 3 \leq 2^n$? Demuestra tu respuesta por inducción.
30. Utiliza el principio de inducción para demostrar que $1/(2n) \leq [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)]/(2 \cdot 4 \dots 2n)$ para n entero positivo.
31. a) Determina qué franqueos se pueden formar usando sólo sellos de 5 y 6 céntimos.
b) Demuestra tu respuesta del apartado (a) utilizando el principio de inducción.
32. ¿Qué cantidades de dinero se pueden obtener empleando sólo monedas de 10 y 25 céntimos? Demuestra tu respuesta haciendo uso de alguna forma de inducción.
33. Un cajero automático sólo da billetes de 20 y 50 euros. ¿Qué cantidades de dinero puede dispensar suponiendo que no hay límite de cantidad? Demuestra tu respuesta haciendo uso de alguna forma de inducción.