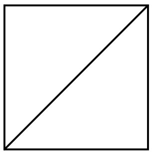
Números Reales – Orden – Axioma de Completitud - Valor Absoluto

Seguramente el lector ya conoce estructuras numéricas, naturales, enteros, racionales. Sus diferencias y carencias. ¿Qué hizo necesario la creación de una estructura aún más amplia que los racionales?
Lo mostraremos con el siguiente ejemplo.



Consideremos un cuadrado de lado 1 (unidad cualquiera). Queremos calcular una de sus diagonales (L). Aplicando Pitágoras tendríamos:

$L^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow L^2 = 2$

Si $L \in Q \Rightarrow L = \dfrac{p}{q}$, siendo p y q enteros, primos entre sí (fracción irreducible).

Ahora $L^2 = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = \dfrac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ es par $\Rightarrow$ p es par $\Rightarrow$ p = 2t ; $t \in Z$

En consecuencia tendremos que : $p^2 = 4t^2$.

Como $\left.\begin{matrix} p^2 = 4t^2 \\ p^2 = 2q^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2q^2 = 4t^2 \Rightarrow q^2 = 2t^2 \Rightarrow q^2$ es par $\Rightarrow$ q es par

Por lo tanto si $L = \dfrac{p}{q}$ perteneciera al conjunto de los racionales, p sería par y q también, esto sería contradictorio con lo supuesto, p y q eran primos entre sí.
Concluimos que no existe racional que elevado al cuadrado sea 2. El conjunto de los racionales no nos permite “medir” la longitud de la diagonal de un cuadrado.
De aquí la importancia de disponer de una estructura que nos permita medir cualquier longitud u otra magnitud escalar.
Al número $\sqrt{2}$, razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado, se le denominó irracional, al no poder expresarse como cociente de dos números enteros.

Para cubrir este y otros inconvenientes es que presentamos a los números reales
El camino que seguiremos es el de partir directamente de los números reales y considerar a los naturales, enteros y racionales como subestructuras de los reales.

Existe un conjunto de números llamados reales en el que están definidas 2 operaciones: Adición (+) y multiplicación ($\times$).
Esta estructura se indica así: (R , + , $\times$) (Axioma de Cuerpo)
Sean **a**, **b** y **c** reales cualesquiera.

Propiedades	**Adición (+)**	**Multiplicación (.)**
Conmutativa	A1 **a + b = b + a**	M1 **a.b =b.a**
Asociativa	A2	M2 ....
Existencia del neutro	A3 ($\exists$0), 0 $\in$ R tal que: **a + 0 = 0 + a = a**	M3 ....
Existencia del simétrico	A4 (Opuesto)........................	M4 (Inverso) ($\forall$ **a**), **a** $\in$ R y **a** $\neq$ 0, ($\exists$ **1/a**), **1/a** $\in$ R tal que: **a.1/a = (1/a).a = 1**
Distributiva	D	

A partir de esta estructura se desprenden varias propiedades, algunas de las cuales probaremos.

1 – Monotonía de la suma: Si $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

Resolver en R. (Justifica la propiedad aplicada)

$x + 4 = 9$

2 – Monotonía de la multiplicación: Si $a = b \Rightarrow a . c = b . c$

Resolver en R. (Justifica la propiedad aplicada)

$4.x = 8$

3 – Propiedad cancelativa (+): Si $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

Dem)

$$a+c=b+c \Rightarrow (a+c)+(-c)=(b+c)+(-c)$$

$$\Rightarrow a+(c+(-c))=b+(c+(-c)) \Rightarrow a+0=b+0 \Rightarrow a=b$$

Resolver en R

$2x + x^4 - 2 = 3 + x^4$

4 - Propiedad cancelativa (.) $\left.\begin{array}{l} a . c = b . c \\ c \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$

Dem)............

Resolver en R: $4x = 12 \Rightarrow 4x=4.3$ ....

5 – Propiedad de Absorción del producto.

$$a.0 = 0, \forall a \in R$$

Dem)

$$a+0=a=a.1=a(1+0)=a.1+a.0=a+a.0 \Rightarrow$$

$$a+0=a+a.0 \Rightarrow 0=a.0$$

Justifica las propiedades usadas.

Hallar $x \in R$ para que: $(x + 6). (x + 1) = (x + 6). 2x$

6 – Propiedad Hankeliana (ausencia de divisores de 0)

$$a.b=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ \vee \\ b=0 \end{cases}$$

Dem) Si $a = 0$, la proposición es verdadera

Si $a \neq 0$, $\left.\begin{array}{r} \text{por hipótesis } a.b=0 \\ \text{por teorema anterior } a.0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a.b = a.0, \text{ con } a \neq 0 \Rightarrow b=0$

Resolver en R: $t^2 + 9t = 0$

A partir de las operaciones suma y producto, se pueden definir otras dos, que son: Diferencia y Cociente. Diferencia: $a - b = a + (-b)$

Cociente: $a : b = a \times (1/b)$, $b \neq 0$

Ejercicios

Determina, indicando las propiedades usadas, el conjunto de los números reales x que cumplen:

a) $2x + 1 = x + 4$
b) $3x^2 + 5x = 0$
c) $(x - 3). (x + 8) = 0$
d) $(6x - 3).2x - (6x - 3) = x. (6x - 3)$
e) $x^3 - 2x^2 = 0$

¿Qué propiedades se han utilizado en la demostración de la siguiente propiedad?

$$\boxed{\mathbf{x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \quad ó \quad x = -y}}$$

Dem)

$$x^2 = y^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{........}} x^2 + (-y^2) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{......}} (x + y).(x + (-y)) = 0 \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{......}} \begin{cases} x + y = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -y} \\ ó \\ x + (-y) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = y} \end{cases}$$

Resolver en R, utilizando la propiedad anterior.

a) $(x - 2)^2 = 9$
b) $(x - 2)^2 = (x - 1)^2$

Prueba las siguientes proposiciones en (R, +, $\times$). a y b son números reales.

i) $-(-a)=a$ ii) $\dfrac{1}{1/a} = a$ iii) $-(a.b)=(-a).b=a.(-b)$ iv) $(-a).(-b) = a.b$

Axioma de Orden.

Este axioma nos permite definir los conceptos de mayor y menor. Ordenando así el conjunto de números reales.
R^+ ------ Reales positivos.

O1) Si $a \in R^+$ y $b \in R^+ \Rightarrow (a + b) \in R^+$ y $(a . b) \in R^+$.

O2) Si $a \neq 0 \Rightarrow a \in R^+$ ó $(-a) \in R^+$

O3) $0 \notin R^+$.

El siguiente teorema justifica que R^+ no es vacío.

Teorema

$$1 \in R^+$$

Dem) Supongamos que $1 \notin R^+$ ($1 \neq 0$ por el primer axioma) $\Rightarrow (-1) \in R^+$ (por O2) $\Rightarrow (-1).(-1) \in R^+$ (por O1).

Como ya se probó que $(-a).(-b) = a.b \Rightarrow (-1).(-1) = 1.1 = 1 \Rightarrow 1 \in R^+$, pero supusimos que $1 \notin R^+$ contradiciendo así la tesis.

Definiciones:

1) $a < b \Leftrightarrow (b - a) \in R^+$.
2) $a > b \Leftrightarrow \mathbf{b < a}$
3) $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ó $a = b$.
4) $a \geq b \Leftrightarrow \mathbf{b \leq a}$

1) "<" es una relación de orden estricto total en R.

Cumple: i) $a \not< a$ (Inidéntica)

ii) $a < b \Rightarrow b \not< a$ (Asimétrica)

iii) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Transitiva)

iv) Dados a y b números reales, verifican una y solo una de las siguientes proposiciones: a<b ; a = b ; a > b. (Tricotomía)

Dem iii) $\left.\begin{array}{l} a<b \Rightarrow b-a \in R^{+} \\ b<c \Rightarrow c-b \in R^{+} \end{array}\right\} \Rightarrow (por O1)(b-a)+(c-b) \in R^{+}$

Como $(b-a)+(c-b)=c-a \Rightarrow c-a \in R^{+} \Rightarrow a<c$

2) Monotonías de "+" y "×"

$$I) a<b \Rightarrow a+c<b+c$$

$$II) \left.\begin{array}{l} a<b \\ c<d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c<b+d$$

$$III) \left.\begin{array}{l} a<b \\ c \in R^{+} \end{array}\right\} \Rightarrow a.c<b.c$$

$$IV) \left.\begin{array}{l} a<b \\ -c \in R^{+} \end{array}\right\} \Rightarrow a.c>b.c$$

DemIII)Por hipótesis $\left.\begin{array}{l} a<b \Rightarrow b-a \in R^{+} \\ c \in R^{+} \end{array}\right\} \Rightarrow (por O1)(b-a).c \in R^{+}$

Como (b-a).c = b.c – a.c entonces: $bc-ac \in R^{+} \Rightarrow ac<bc$

<u>Observación</u>: Las propiedades anteriores nos permiten probar una serie de teoremas, como por ejemplo Densidad.
Podemos además justificar la existencia de nuevos números reales, cosa que el axioma de cuerpo solamente, no lo permitía. (Se puede probar que $1>0 \Rightarrow 1+1>1>0$. Al número real "1+1" lo bautizamos 2. Así aparece el 3, 4, ...).

<u>EJERCICIOS</u>

1) Hallar el conjunto de los x reales que verifican la siguiente desigualdad, $2x+5>x+3$. Detalle las propiedades que utilizó en cada paso.

2) Indica con V ó F si son verdaderas ó falsa respectivamente cada una de las siguientes afirmaciones.

a) Si $x<y$ entonces $x \cdot z<y \cdot z$ para todos x, y, z reales ($z \neq 0$)

b) Para todo z real, si $z \neq 0$ entonces $z^2>0$

c) Si $a<b$ entonces $a^2<b^2$ para todos a y b reales

d) Si a y b son reales positivos, $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$.

3) Hallar el conjunto de los x reales tales que: I) i) $3x+2<0$ ii) $3x+2=0$ iii) $3x+2>0$
II) i) $-3x+1<0$ ii) $-3x+1=0$ iii) $-3x+1>0$

Con las ideas planteadas en el ejercicio 3 podríamos deducir el signo de $f: R \rightarrow R / f(x)=ax+b$; a y b reales, $a \neq 0$. En forma esquematizada:

0
sig(ax+b) -siga | siga →
-b/a

Estudiaremos a continuación la resolución en (R; +; .;<) de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c reales, a distinto de 0.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow ax^2+bx=-c \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx=-4ac \Leftrightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Llamando } \Delta = b^2\text{-4ac} \\ \text{Como } 4a^2x^2+4abx+b^2=(2ax+b)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (2ax+b)^2=\Delta$$

Si $\Delta > 0$

$$(2ax+b)^2=\Delta \Leftrightarrow (2ax+b)^2=(\sqrt{\Delta})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax+b=\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ 2ax+b=-\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

En este caso S= $\left\{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$..

Si $\Delta = 0$

$(2ax + b)^2 = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-b}{2a}$, entonces: S = $\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

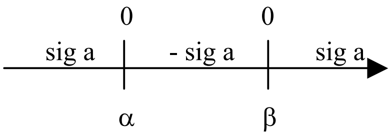
Si $\Delta < 0$

Como $\forall x \in R, (2ax+b)^2 \geq 0 \Rightarrow \nexists x \in R / (2ax+b)^2=\Delta \Rightarrow S=\{\ \}$..

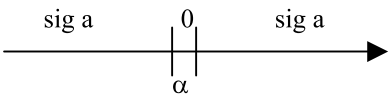
Observaciones: 1) Utilizamos $\sqrt{\Delta}$ sin haber definida previamente raíz cuadrada por motivos prácticos.
2) El signo de la expresión ($ax^2 + bx + c$) no lo vamos a deducir, escribiremos las conclusiones ya vistas en el curso de 1° EMT a los efectos de la resolución de algunas inecuaciones con las que trabajaremos.

Consideramos $f: R \to R / f(x)=ax^2+bx+c$, con a, b y c reales, a distinto de 0. Sea $\Delta = b^2$-4ac

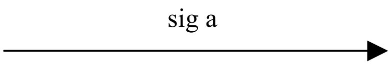
1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ f admite dos raíces reales α y β (α < β) sig f(x)



2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ f admite una sola raíz real α (doble) sig f(x)



3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ f no admite raíces reales sig f(x)



EJERCICIOS

1) Resuelve en (R; +; . ; <) las siguientes ecuaciones.

A) a) $x(-x+2)=(1-x)2x + 4$; b) $2(x-1)^2 = 4x(x-1)$; c) $(x+2)^2=4x$; d) $\dfrac{(4-x)^2}{2}=-4x+x^2+6$ e) $(x-1)^2=-(2+x)^2$

B) a) $(x-1)^2=1+5x-x^2$ b) $(x+2)(2-x)=-\dfrac{(-8+x^2)}{4}$ c) $\dfrac{(1-x)^2}{2}=\dfrac{2-4x}{4}$

C) a) $\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{y^2-1}{2}+y$ b) $x(2x-1)=-(x-2)^2$ c) $\dfrac{y(y-1)}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

d) $\dfrac{(4-x)^2}{2}-\dfrac{x}{4}=\dfrac{3}{2}$

2) Resuelve en (R; +; . ; <) las siguientes inecuaciones y sistemas de inecuaciones

A) a) $-2(-2x+1)\leq 3x-6$ b) $3(-y+1)-(2y-4)<6y$ c) $(4-y)^2 - 1 > (2+y)^2$

B) a) $-1 \leq 2x-6 < 4$ b) $-40 < -2(x-1) < -20$ c) $0 > -4(x+3) \geq -20$

C) a) $(1-x)^2 > 2(x+ 0,5)$ b) $x-4-x^2 \leq -(8-x)$ c) $3x-2(x^2+2) \leq 2$

D) a) $(6x^2 - 6)2x < 0$ b) $(4x^2 - x)(-3x+1) \geq 0$ c) $(-2x+2)(x^2 + 4) > 0$

E) a) $\dfrac{1-9x}{2x^2+x} \leq 0$ b) $\dfrac{3x^2-3}{-2x^2+6} \geq 0$ c) $\dfrac{x^2+2-3x}{-4x+4} < 0$

d) $\dfrac{(x+3)^2(x^2-4)}{x^2-5x+4} \geq 0$ e) $\dfrac{x+3}{-x^2+x+12} \leq 1$

3) Resuelve en (R; +; . ; <) los siguientes sistemas de inecuaciones

$$\begin{cases} (x+1)^2 - (x+3) < 0 \\ \dfrac{2x+3}{5-3x} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-3} \leq 0 \\ \dfrac{1-3x}{1-x^2} > 1 \end{cases}$$

4) Dada la ecuación

$x^2 - (m+2)x + \dfrac{1}{4} = 0, m \in R$. Determina los valores de m para que:

i) Admita solo una raíz real. ii) Admita dos raíces reales distintas.

VALOR ABSOLUTO DE UN REAL

Consideremos un número real “y”. Denominamos valor absoluto de “y” ($|y|$)

$$|y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: $|3| = 3$ $|-14| = 14$ $|0| = 0$

$|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ $||1 - \pi| - 3| = |\pi - 4| = 4 - \pi$

Resuelva en R:

$|x| = 4$; $|x| < 3$; $|x| > 5$ $|x| \leq 3$; $|x| \geq 5$

PROPIEDADES.

Sean x e y dos reales cualesquiera.

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $|x^2| = |x|^2 = x^2$
4) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$
5) $|x . y| = |x| . |y|$
6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$
7) $-|x| \leq x \leq |x|$

8) Siendo $r \in R^{+}$ se cumple que: $\begin{cases} i)\ |x| \le r \Leftrightarrow -r \le x \le r \\ ii)\ |x| \ge r \Leftrightarrow x \ge r \ \vee \ x \le -r \end{cases}$

9) l x + y l ≤ lxl + lyl (Desigualdad triangular)
10) l x - y l ≤ lxl - lyl

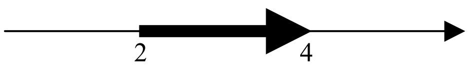
Ejercicios
1) Resolver en (R;+;.;≤): i)l 1 + 2x l < 1 ; ii) l 1 – x l ≤ 9 ; iii) l x – 1 l > 2 ; iv) l x+2 l ≥ 5

2) Resolver en (R;+;.;≤): i) $|x^2 - x| - \dfrac{4x-2}{3} \ge 0$; ii) $|x-2| \ge |3x-2|$; iii) $\left|\dfrac{x^2-x}{x+1}\right| < x - \dfrac{1}{3}$

3) Resolver en (R;+;.;≤): i) $|x^2 - x| < 6$; ii) $|x+1|^2 - 3|x+1| < 0$; iii) $|x| + |3x-4| < 1$
4) Analiza el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
i) $x < 5 \Rightarrow |x| < 5$; ii) $|x-5| < 2 \Rightarrow 3 < x < 7$; iii) $|1+3x| \le 1 \Rightarrow x \ge -\dfrac{2}{3}$
iv) La ecuación $|x-1| = |x-2|$ tiene solución vacía.
5) Teniendo en cuenta lo visto de valor absoluto, demuestra: $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|; (\forall x, y \in R)$

<u>COTAS Y EXTREMOS DE UN CONJUNTO DE NÚMEROS REALES. COMPLETITUD</u>

Sea A = {x, x ∈ R, 2 ≤ x < 4 }



Diremos que el número 5,3 es **cota superior** de A porque x ≤ 5,3 , (∀x), x ∈ A.
En general cualquier número mayor ó igual que todo elemento del conjunto es una cota superior de A.
Trata de contestar las siguientes preguntas:
- ¿√109 es cota superior de A?
- ¿-3 lo es? ¿y 4?
- ¿Existe una cota superior de A menor que 5,3?
- ¿Existe una cota superior de A menor que todas las cotas superiores del conjunto?, ¿cuál sería?
- ¿Si llamamos extremo superior ó supremo de A a la menor de las cotas superiores, ¿cuál sería el extremo superior de A?
- Un conjunto tiene máximo si una de sus cotas superiores pertenece al conjunto. ¿El conjunto A tiene máximo?
- Análogamente, ¿podrías determinar tres cotas inferiores de A, observar si tiene extremo inferior (ínfimo) y si tiene mínimo?

A partir de la actividad anterior completaremos las siguientes definiciones.
Sea A un conjunto de reales no vacío.

1) A está ***acotado superiormente*** ⇔ (∃ h), h ∈ R / (∀ x), x ∈ A, x ≤ h.
Al real h lo llamamos cota superior de A.
2) A está ***acotado inferiormente*** ⇔ (∃ k), ...
Al real k lo llamamos cota inferior de A.

3) A está ***acotado*** ⇔ A está acotado inferior y superiormente.

4) M es ***máximo*** de A ⇔ M ∈ A y (∀ x), x ∈ A, x ≤ M.

5) m es ***mínimo*** de A ⇔ ....

6) Si existe la cota superior mínima de A, se le llama ***extremo superior*** ó ***supremo*** de A.
($\overline{\text{ext}}$ A)
7) ....

Ejercicios.

1) Para cada uno de los siguientes conjuntos, determina, si tienen, extremo superior, inferior, máximo y mínimo.

a) $A = \{x \in R / x^2 - 2x \leq 5\}$

b) $B = \{x \in R / 1 < x \leq 5 \vee 6 \leq x < 7\}$

c) $C = \{x \in R / x > 0 \wedge x^2 < 4\}$

d) $D = \{x \in R / x = 1 - \frac{1}{n}; n \in N^*\}$

3) Sea B un conjunto no vacío de números reales cuyo extremo superior es 3.
Analiza el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
- i) Todo número mayor que 3 es cota superior de B.
- ii) Todo número menor que 3 pertenece al conjunto B.
- iii) Existe un elemento del conjunto B mayor que 26/9.
- iv) No existen elementos de B mayores que π.
- v) Si llamamos D al conjunto de los opuestos de B. Entonces D está acotado inferiormente.
- vi) D está necesariamente acotado superiormente.
- vii) El extremo inferior de D es -3.

El axioma que enunciaremos a continuación marca una diferencia entre las estructuras:
(Q; +; . ; <) y (R; +; . ; <).
Los dos axiomas que ya estudiamos no marcan diferencias entre ellas.

AXIOMA DE COMPLETITUD

$A \subset R$, $A \neq \varnothing$, A está acotado superiormente entonces $\exists\ K \in R / K = \overline{\overline{ext}}(A)$

Ejercicio:

Representa el conjunto F = $\{x \in R / x^2 < 2\}$ en el eje real.

¿Está acotado superiormente?, ¿tiene extremo superior?

¿Y el conjunto H = $\{x \in Q / x^2 < 2\}$, tiene extremo superior?