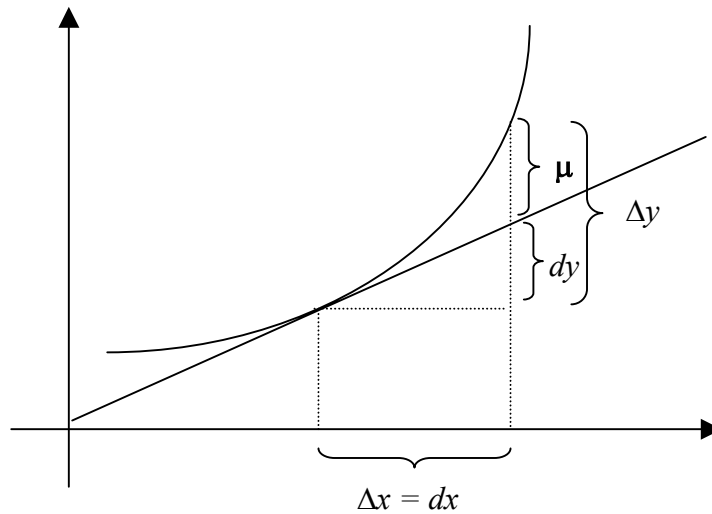


DIFERENCIAL



Si una función $y = f(x)$ admite derivada finita en un punto su incremento puede expresarse como $\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x$, siendo ε un infinitésimo para $\Delta x \rightarrow 0$. Al primer término se lo llama “diferencial y ”, cuya notación es $dy = f'(x) \Delta x$. Como el incremento de la variable independiente es igual a su diferencial tenemos que $\Delta x = dx$, entonces $dy = f'(x) dx$. Observando la figura vemos que $\Delta y - dy = \mu = \varepsilon \Delta x = \varepsilon dx \rightarrow 0$ “más rápido” que dy en la medida que $\Delta x = dx \rightarrow 0$ (por ser un infinitésimo de orden superior)

Definición: La diferencial de una función en un punto es el incremento de la ordenada de la tangente en ese punto.

Por lo tanto la variación de una función se puede expresar como el producto de su derivada en el punto por variación de su variable independiente en dicho punto.

Ejemplo: Dado un prisma recto de base rectangular de dimensiones: largo: $4x + 2$, ancho: $3x$ y altura: $2x + 5$. Calcular cuánto varía su volumen cuando x varía en $0,01$.

$$V(x) = (4x + 2)(3x)(2x + 5) = 24x^3 + 72x^2 + 30x$$

$$V'(x) = 72x^2 + 144x + 30$$

$$dV = V'(x) dx = (72x^2 + 144x + 30) \times 0,01$$

Para fijar ideas, si el valor de x fuera originalmente 5 , el volumen sería $V(5) = 4950$

Ahora incrementamos x en $0,01 \Rightarrow x = 5$, por lo tanto el aumento de volumen será

$$dV = V'(5) \times 0,01 = 25,5$$

Esto quiere decir que el volumen aumentó en $25,5 \Rightarrow V(5,01) \approx 4975,5$ ($4975,54$)

Cuanto más pequeño sea el incremento de x , más exacto será el valor del incremento dy calculado. (error de aproximación)

INTEGRALES

Durante el curso hemos visto que dada una función f podemos encontrar su derivada f' ; en cambio hasta ahora no nos hemos preguntado cuál es la función F cuya derivada es f . Dicha función F es la **primitiva de f** o sea que se cumple que $F' = f$.

Si bien encontrar la derivada de una función es un proceso sencillo, no así lo es el proceso inverso al que llamaremos integración.

Ejemplo: si $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ donde C es una constante. (compruebe derivando a F)

$$\text{NOTACIÓN } \int x \, dx = F(x) = \frac{x^2}{2} + C \quad (\text{integral indefinida})$$

La constante C puede determinarse si se conocen “datos complementarios”, pues vemos que cualquiera sea el valor de la constante, si derivamos a la función primitiva obtenemos la función integrando.

“ dx ” es lo que llamaremos diferencial x y expresa a la variable con respecto a la cuál se integra.

Ejemplo: a) $\int xy \, dx = \frac{x^2}{2} y + C$ sin embargo $\int xy \, dy = x \frac{y^2}{2} + C$

b) $\int 3x + 2y + 1 \, dx = \frac{3x^2}{2} + 2yx + x + C$ $\int 3x + 2y + 1 \, dy = 3xy + y^2 + y + C$

OBSERVACIÓN: recordando que $\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow dy = y' \, dx$ si integramos ambos

miembros de la igualdad tendremos $\int 1 \, dy = \int y' \, dx \Rightarrow y + C = y + C \Rightarrow y = y$

Asumiremos como válidas las siguientes propiedades:

- 1) $\int k u \, dx = k \int u \, dx$ ($k = \text{constante}$)
- 2) $\int u + v \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$
- 3) $\int u'v \, dx = uv - \int u \, v' \, dx$ (integración por partes)

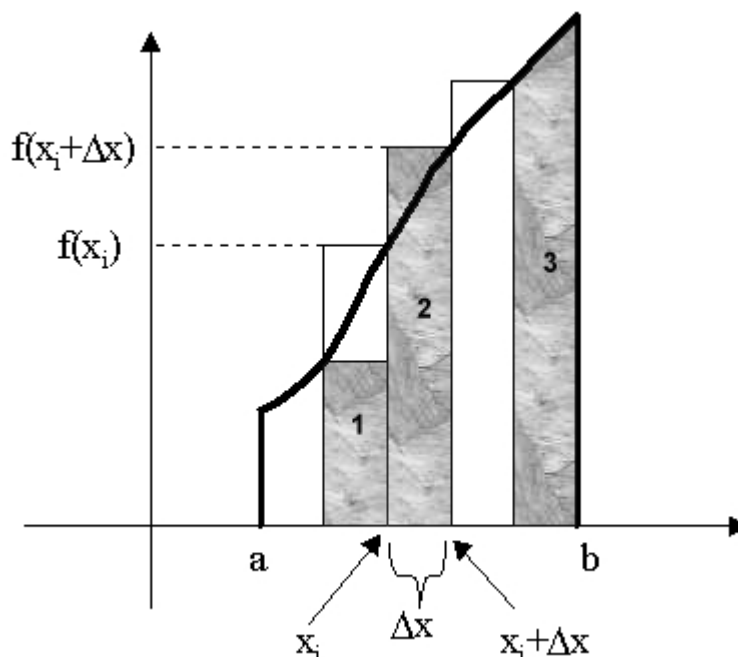
Ejemplo:

$$\int 3x^2 + 5x \, dx = \int 3x^2 \, dx + \int 5x \, dx = 3 \int x^2 \, dx + 5 \int x \, dx = 3 \frac{x^3}{3} + C + 5 \frac{x^2}{2} + C' =$$

$$x^3 + 5 \frac{x^2}{2} + C'' \quad \text{siendo } C'' = C + C' \quad (\text{propiedades 1 y 2})$$

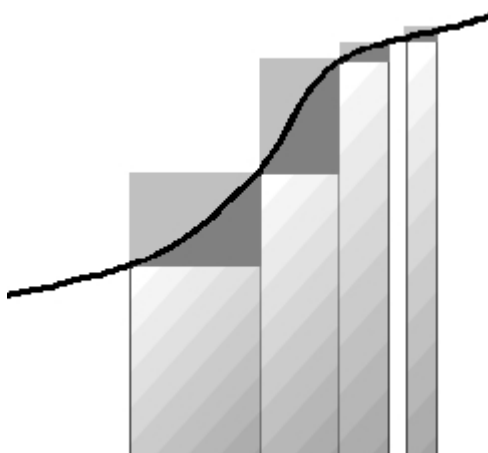
$$\int L(x) \, dx = \int 1.L(x) \, dx = xL(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = xL(x) - x + C \quad (\text{propiedad 3})$$

Nociones sobre Integral definida



Debo aclarar que lo haremos en forma intuitiva y nos permitiremos algunas “libertades” con el fin de facilitar su comprensión.

Nos proponemos a calcular el área “bajo la curva” f , el eje horizontal y desde a hasta b . O sea el área del “trapezoide” $(a, 0)$ $(a, f(a))$ $(b, f(b))$ $(b, 0)$ a la que llamaremos A . Como no existe ninguna fórmula sencilla que pueda calcularla optamos por hacer una partición del intervalo $[a,b]$ en n intervalos Δx iguales (para hacerlo más sencillo) y hallar el área de las fajas como la **3** y sumarlas. Nuevamente nos encontramos que no existe una fórmula sencilla para dicho cálculo. Sin embargo vemos que podemos calcular el área de rectángulos como el **1**, $\Delta x \times f(x_i)$ (área por defecto) o de rectángulos como el **2**, $\Delta x \times f(x_i + \Delta x)$ (área por exceso). El área buscada estaría comprendida entre la suma de las áreas de los rectángulos por defecto (a la que llamaremos s) y la suma de las áreas de los rectángulos por exceso (a la que llamaremos S). O sea $s < A < S$.



Con un poco de imaginación intentaremos achicar al intervalo Δx (como se ve en la figura de la izquierda), podemos observar que la diferencia de áreas entre los rectángulos por defecto y por exceso va disminuyendo y cuando $\Delta x \rightarrow 0$. O lo que es lo mismo decir:

$s \rightarrow A$ y $S \rightarrow A$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Puede pensarse entonces que si la base Δx fuera “infinitamente fina” tendríamos que $s = A = S$, que es lo que estamos buscando.

Si llamamos dx (diferencial x) a Δx (base) y $f(x)$ a la altura de cada rectángulo (infinitamente

fino) y sumamos dichas áreas obtenemos la expresión:

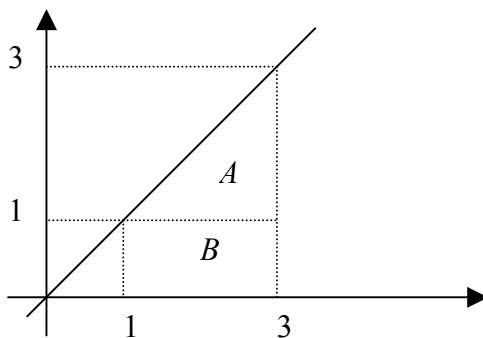
$$\sum_1^{+\infty} f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = \text{“área del trapecoide”} = \text{integral definida de } f \text{ entre } a \text{ y } b$$

Y se calcula como: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (regla de Barrow) siendo F la primitiva de f .

La integración se llama “definida” cuando se expresa en qué intervalo se integra y representa al área bajo la curva (número real).

Es importante observar que la **integral definida es un número real** a diferencia de la **integral indefinida o primitiva que es una función**.

Ejemplo 1: Calcularemos el área bajo la recta $y = x$ y el eje ox en el intervalo $[1,2]$



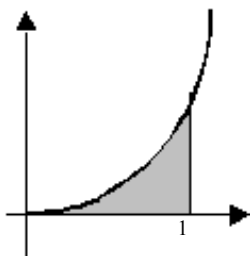
Si aplicamos nuestros conocimientos de integral definida podemos escribir:

$$\int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} + C \Big|_1^2 = F(2) - F(1) = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Otra manera de obtener el resultado es usando fórmulas sencillas (cosa que en gral. no sucede) para verificar el resultado

obtenido. En este caso el área bajo la curva es $A + B$, donde $B = 1 \times 1$ y $A = \frac{1}{2}(1 \times 1)$ $\Rightarrow A + B = \frac{3}{2}$ como ya vimos.

Ejemplo 2:



Calcularemos el área bajo la parábola dada y el eje ox en el intervalo $[0,1]$
Sea $f: f(x) = x^2$

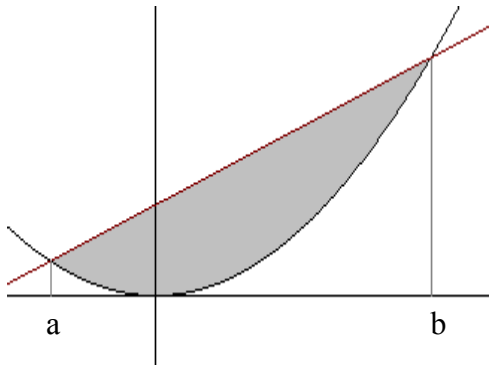
Calculamos por lo tanto la primitiva de $f(x) \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ y

hallamos $F(0) = C$ y $F(1) = 1/3 + C$

Hacemos $F(1) - F(0) = 1/3$ es el área buscada.

O directamente escribimos $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

Ejemplo 3:



Calcularemos el área sombreada, comprendida entre las curvas:

$$f(x) = x + 1 \text{ y } f(x) = x^2$$

Para ello será necesario hallar las abscisas de los puntos de corte a y b de las mismas.

$$\text{Hacemos } x + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuaciones tenemos que:

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Hallaremos el área bajo la recta [1] y le restaremos el área bajo la parábola [2] en [a,b], obteniendo así el área buscada.

$$\int_a^b x + 1 \, dx - \int_a^b x^2 \, dx = \int_a^b -x^2 + x + 1 \, dx = \left. \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C \right|_a^b \approx 1,51 - (-0,34) = 1,85$$

