

SERIES

Sea (a_n) una sucesión, consideremos una nueva sucesión (A_n) así formada:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_1 &= a_0 + a_1 \\ A_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ A_3 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ A_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i \end{aligned}$$

Definición:

Esta nueva sucesión se llama serie de término general a_n o $(A_n) = \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) = \sum a_n$

A_n se llama **reducida de orden n** de la serie.

Si $(A_n) \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, se dice que la serie **converge** y que α es la suma de la misma. **(C)**

Si $(A_n) \rightarrow \infty$, se dice que la serie **diverge**. **(D)**

Si (A_n) oscila, se dice que la serie **oscila**. **(OSC)**

Ejemplos:

a) Sea $(A_n) = \left(\sum_0^n (-1)^i \right)$ es oscilante.

b) Sea $(Q_n) = \left(\sum_0^n q^i \right)$, $q \in \mathbb{R}$; esta serie se llama geométrica por ser una progresión geométrica de razón q .

Si $|q| < 1$, $(q^n) \rightarrow 0 \Rightarrow (Q_n) \rightarrow \frac{1}{1-q}$, la serie converge y su suma es $\frac{1}{1-q}$

Si $|q| > 1$, $(q^n) \rightarrow \infty \Rightarrow (Q_n) \rightarrow \infty$, la serie diverge.

Si $q = 1$, $\left(\sum_0^n 1 \right) = n + 1 \Rightarrow (Q_n) \rightarrow +\infty$

Si $q = -1$, $\left(\sum_0^n (-1)^i \right)$, la serie es oscilante.

Teorema

$$\left(\sum_0^n a_i \right) \text{ converge (C)} \Rightarrow (a_n) \rightarrow 0$$

Demostración: supongamos que $(A_n) = \left(\sum_0^n a_i \right) \rightarrow \alpha$

$a_n = A_n - A_{n-1}$, como (A_{n-1}) es subsucesión de (A_n) , también tiende a α y por lo tanto $(a_n) \rightarrow \alpha - \alpha = 0$

OBSERVACION: el recíproco de este teorema es falso.

Corolario

$$(a_n) \text{ no tiende a cero} \Rightarrow \left(\sum_0^n a_i \right) \text{ no converge.}$$

Demostración: supongamos por absurdo que $\left(\sum_0^n a_i \right) \mathbf{C} \Rightarrow (a_n) \rightarrow 0$ contra lo supuesto.

Teorema

$$\left(\sum_0^n |a_i| \right) \mathbf{C} \Rightarrow \left(\sum_0^n a_i \right) \mathbf{C}$$

Demostración: $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$ y $B_n = \sum_{i=0}^n |a_i|$, (B_n) converge, si aplicamos el criterio de convergencia de Cauchy tendremos que:

Para cada $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 /$ si $n' \geq n_0$ y $n'' \geq n_0$, $|B_{n''} - B_{n'}| < \varepsilon$ (sup $n' < n''$)

$$|B_{n''} - B_{n'}| = | |a_{n'+1}| + |a_{n'+2}| + \dots + |a_{n''}| | = |a_{n'+1}| + |a_{n'+2}| + \dots + |a_{n''}| \geq$$

$$|a_{n'+1} + a_{n'+2} + \dots + a_{n''}| = |A_{n''} - A_{n'}| \Rightarrow |A_{n''} - A_{n'}| \leq |B_{n''} - B_{n'}| < \varepsilon$$

Por lo tanto (A_n) cumple con la condición de Cauchy, entonces converge.

Definición: si $(|A_n|) \mathbf{C} \Rightarrow (A_n) \mathbf{C}$ Absolutamente

Existen casos en que $(A_n) \mathbf{C}$ y $(|A_n|) \mathbf{D}$, tales series se llaman semiconvergentes.

Teorema

$$\forall n \geq n_0 \quad a_i = b_i \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \text{ y } \left(\sum_{i=0}^n b_i \right) \text{ son series de la misma clase.}$$

Demostración: $\forall n \geq n_0, A_n - B_n = \sum_0^{n_0-1} a_i - b_i + \sum_{n_0}^n a_i - b_i = \sum_0^{n_0-1} a_i - b_i = k$

$$\forall n \geq n_0, A_n = k + B_n \text{ o } B_n = A_n - k$$

$$\text{Si } (A_n) \rightarrow b \text{ o } \infty \Rightarrow (B_n) \rightarrow b - k \text{ o } \infty$$

$$\text{Si } (B_n) \rightarrow c \text{ o } \infty \Rightarrow (A_n) \rightarrow c + k \text{ o } \infty$$

Si una oscila la otra también.

Este teorema permite cambiar un número finito de términos de una serie sin que ésta cambie de clase.

Definición: $(A_n) \rightarrow \alpha \Rightarrow (h A_n) \rightarrow h\alpha$ por teoremas de límites de sucesiones

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

Teorema

$$a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) = \sum_0^{\infty} a_n \text{ no oscila (C o D)}$$

Demostración: en efecto, consideremos la sucesión (A_n) de reducidas $A_{n+1} - A_n = a_{n+1} > 0 \Rightarrow A_{n+1} > A_n$, dicha sucesión es monótona creciente estricta, ya demostramos que converge a su extremo superior (si está acotada) o diverge a $+\infty$ (si no está acotada).

Teorema (criterio de comparación)

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} 1) \sum_0^{\infty} a_n \text{ D} \Rightarrow \sum_0^{\infty} b_n \text{ D} \\ 2) \sum_0^{\infty} b_n \text{ C} \Rightarrow \sum_0^{\infty} a_n \text{ C} \end{cases}$$

Demostración: $a_n \leq b_n \Rightarrow A_n \leq B_n$

- 1) $(A_n) \rightarrow +\infty \Rightarrow$ para cada $k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, A_n > k \Rightarrow$
para cada $k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, B_n > k \Rightarrow (B_n) \rightarrow +\infty$
- 2) $(B_n) \rightarrow B \Rightarrow B$ es extremo superior del conjunto de los $B_i \Rightarrow B_n \leq B \Rightarrow$
 $A_n \leq B_n \leq B \Rightarrow (A_n)$ está acotada superiormente y como (A_n) es monótona creciente $\Rightarrow (A_n)$ es convergente.

SERIES ARMONICAS

Son aquellas cuyo término general es de la forma $\frac{1}{n^\alpha}$

Si $\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \rightarrow +\infty \Rightarrow \mathbf{D}$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha}$ no tiende a cero $\Rightarrow \mathbf{D}$

Si $\alpha > 0$ estudiaremos: 1) $\alpha = 1$, 2) $\alpha < 1$, 3) $\alpha > 1$.

1) $\alpha = 1$, los términos de la serie son: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{16}, \dots$ consideremos la serie

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \dots$ si llamamos b_n al término general de esta nueva

serie tenemos que $\forall n \neq 1, 2^h < n < 2^{h+1}, b_n = \frac{1}{2^{h+1}}; b_1 = 1$

Vemos que $\sum b_n$ es minorante de $\sum \frac{1}{n}$ porque $n \leq 2^{h+1} \Rightarrow \frac{1}{2^{h+1}} \leq \frac{1}{n}$

Intentaremos clasificar $\sum b_n$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$\begin{array}{c} \longleftrightarrow \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \dots \end{array}$$

Observamos que la sucesión de reducidas B_i va tomando los valores

$$1, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n}{2}, \text{ y como } \frac{n}{2} \rightarrow +\infty, \text{ concluimos que la sucesión de reducidas}$$

$(B_n) \rightarrow +\infty$ por lo que $\sum b_n \mathbf{D} \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \mathbf{D}$ por ser mayorante.

2) $\alpha < 1$ $n^\alpha < n^l \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ es minorante de $\sum \frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \mathbf{D}$

3) $\alpha > 1$ comparemos el término general de nuestra serie

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{5^\alpha}, \frac{1}{6^\alpha}, \frac{1}{7^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \dots \text{ con esta otra de término general } (c_n)$$

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \dots$$

Vemos que c_n es mayorante de a_n , en efecto $\forall n \geq 1, 2^h \leq n < 2^{h+1}, c_n = \frac{1}{2^{h\alpha}}$

Como $2^{h\alpha} \leq n^\alpha \Rightarrow c_n = \frac{1}{2^{h\alpha}} \geq \frac{1}{n^\alpha}$

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \frac{1}{8^\alpha}, \dots$$

$$\begin{array}{c} \longleftrightarrow \quad \longleftarrow \quad \longrightarrow \\ 1, \frac{2}{2^\alpha}, \quad \frac{4}{4^\alpha}, \quad \frac{8}{8^\alpha}, \quad \dots \end{array}$$

O sea $1, \frac{1}{2^{\alpha-1}}, \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2}, \frac{1}{(2^{\alpha-1})^3}, \frac{1}{(2^{\alpha-1})^4}, \frac{1}{(2^{\alpha-1})^5}, \dots$

Esta última es geométrica de razón $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ y por lo tanto es convergente.

Como $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ es minorante de $\sum c_n$ que $\mathbf{C} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \mathbf{C}$

Resumen

$\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \mathbf{D}$
$\alpha > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha} \mathbf{C}$

Teorema

$$\text{Si } \exists h \text{ y } k \in \mathbf{R}, n_0 \in \mathbf{N} / \forall n \geq n_0, 0 < h \leq \frac{a_n}{b_n} \leq k \Rightarrow \begin{cases} 1) \sum a_n C \Leftrightarrow \sum b_n C \\ 2) \sum a_n D \Leftrightarrow \sum b_n D \end{cases}$$

Demostración: 1

(\Rightarrow) $h \leq \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow b_n \leq \frac{a_n}{h}$ y como $\sum \frac{a_n}{h} C \Rightarrow \sum b_n C$ por ser minorante.

(\Leftarrow) $\frac{a_n}{b_n} \leq k \Rightarrow a_n \leq kb_n \Rightarrow \sum a_n$ es minorante de $\sum kb_n$ que es convergente.

El caso 2 se demuestra en forma análoga.

Teorema (comparación por límite)

$$\text{Si } \lim \frac{a_n}{b_n} = \delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1) \sum a_n C \Leftrightarrow \sum b_n C \\ 2) \sum a_n D \Leftrightarrow \sum b_n D \end{cases}$$

Demostración: tomamos un $E_{(\delta, \varepsilon)}$ con $\varepsilon < \delta$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow \delta \Rightarrow \exists n_0 / \forall n \geq n_0$ se cumple

$0 < \delta - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \delta + \varepsilon$. Haciendo $\delta - \varepsilon = h$ y $\delta + \varepsilon = k$, aplicamos el teorema anterior.

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} \lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty \\ \sum b_n D \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n D$$

Demostración: $\forall n \geq n_0, \frac{a_n}{b_n} > k \Rightarrow a_n > kb_n \Rightarrow \sum a_n > \sum kb_n$ que es divergente.

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} \lim \frac{a_n}{b_n} = 0^+ \\ \sum b_n C \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n C$$

Demostración: análoga a la anterior.

Teorema

$$\text{Si } \forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow \begin{cases} 1) \sum b_n \text{ C} \Rightarrow \sum a_n \text{ C} \\ 2) \sum a_n \text{ D} \Rightarrow \sum b_n \text{ D} \end{cases}$$

Demostración: como se trata de series de términos positivos, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \Rightarrow$

$$\frac{b_n}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \text{ usando reiteradamente lo anterior tenemos que}$$

$$\frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{a_{n_0+1}} \leq \frac{b_{n_0+2}}{a_{n_0+2}} \leq \dots \leq \frac{b_n}{a_n}$$

1) $\frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_n}{a_n} \Rightarrow a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$ entonces $\sum a_n$ es minorante de $\sum \left(\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \right) b_n$ que **C**.

2) $b_n \geq \frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} a_n \Rightarrow \sum b_n$ es mayorante de $\sum \left(\frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} \right) a_n$ que **D**.

Teorema (Criterio del cociente o de D'Alembert)

$$1) \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \alpha > 1 \\ 1^+ \end{cases} \Rightarrow \sum a_n \text{ D}$$

$$2) \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ C}$$

Demostración: 1) en cualquiera de los dos casos, por aplicación de la definición de límite se consigue que $\forall n \geq n_0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$, por lo que (a_n) no tiende a cero

por ser monótona creciente y de términos positivos $\Rightarrow \sum a_n \text{ D}$.

2) Tomamos $q / \alpha < q < 1$ y elegimos un E_α que no contenga a q ; nuevamente a partir de la definición de límite tenemos que $\forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} \in E_\alpha \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$

Sea $b_n = q^n$, $\sum b_n \text{ C}$ pues $0 < q < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ C}$ por ser minorante de una convergente.

OBSERVACION: el criterio falla si $\alpha = 1$ o 1^- .

Teorema (Criterio de la raíz o de Cauchy)

$$1) \lim \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \alpha > 1 \\ 1^+ \end{cases} \Rightarrow \sum a_n \text{ D}$$

$$2) \lim \sqrt[n]{a_n} = \alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ C}$$

Demostración: 1) como en el teorema anterior, eligiendo adecuadamente un entorno del límite se consigue que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0, a_n \geq 1^n = 1$, entonces (a_n) no tiende a cero y la serie no puede ser convergente; por ser de términos positivos diverge.

2) Tomamos $q / \alpha < q < 1$ y elegimos un E_α que no contenga a q ; nuevamente a partir de la definición de límite tenemos que $\forall n \geq n_0, \sqrt[n]{a_n} \in E_\alpha \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow a_n < q^n \Rightarrow \sum a_n$ es minorante de $\sum q^n$ que es convergente por ser $q < 1$.

Definición: llamaremos sucesión de Raabe de la serie $\sum a_n$ a $(SR(a_n)) = n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$

Teorema (Lema de Raabe)

$$\lim \left(SR \left(\frac{1}{n^\beta} \right) \right) = \beta^-$$

Demostración: $SR \frac{1}{n^\beta} = n \left(1 - \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \right) = n \left(1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta \right)$ pero $\left(1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta \right) \approx \beta \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \beta \left(\frac{1}{n+1} \right)$ entonces $n \left(1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta \right) \approx \left(\beta \frac{n}{n+1} \right) \rightarrow \beta^-$ como queríamos.

Este criterio se utiliza en los casos en que no sea aplicable el criterio del cociente.

Teorema (Criterio de Raabe)

$$1) SR(a_n) \rightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\ 1^- \end{cases} \Rightarrow \sum a_n \text{ D}$$

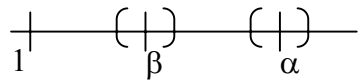
$$2) SR(a_n) \rightarrow \alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ C}$$

Demostración: 1) como en los teoremas anteriores y a partir de la definición de límite

resulta que $\forall n \geq n_0, n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \frac{n-1}{n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{n}{1} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}}, \text{ sea } b_n = \frac{1}{n-1}, \text{ como } \sum b_n \mathbf{D} \text{ y como } \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ resulta que}$$

$\sum b_n \mathbf{D} \Rightarrow \sum a_n \mathbf{D}$, por ser mayorante.

2)  tomamos $\beta / 1 < \beta < \alpha$ y luego elegimos entornos disjuntos de α y β como se muestra en la figura.

$\forall n \geq n_0 \quad SR(a_n) \in E_\alpha$ y $\forall n \geq n_1 \quad SR\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \in E_\beta \Rightarrow \forall n \geq \max(n_0, n_1)$ se cumple que

$$SR\left(\frac{1}{n^\beta}\right) < SR(a_n) \Rightarrow n\left(1 - \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta}\right) < n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \Rightarrow -\frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} < -\frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{(n+1)^\beta}{1} > \frac{a_{n+1}}{a_n}} \Rightarrow \sum a_n \text{ es minorante de } \sum \frac{1}{n^\beta} \text{ que converge por ser } \beta > 1.$$

SERIES DE TERMINOS ALTERNADOS

Teorema (Criterio de Leibnitz)

$$\left. \begin{array}{l} a_n > 0 \quad (a_n) \rightarrow 0 \\ (a_n) \text{ monótona decreciente} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n \mathbf{C}$$

Demostración: si llamamos como siempre A_n a la reducida de orden n de la serie, se puede probar que (A_{2n}) y (A_{2n+1}) forman un par de sucesiones monótonas convergentes, por lo que tienen límite finito.

1) (A_{2n}) monótona creciente.

$$A_{2n+2} = A_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \Rightarrow A_{2n+2} - A_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0, \text{ por el decrecimiento de } (a_n) \Rightarrow A_{2n+2} - A_{2n} > 0 \Rightarrow A_{2n+2} > A_{2n}$$

2) (A_{2n+1}) monótona decreciente.

$$A_{2n+3} = A_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \Rightarrow A_{2n+3} - A_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+3} < 0 \text{ por el decrecimiento de } (a_n) \Rightarrow A_{2n+3} - A_{2n+1} < 0 \Rightarrow A_{2n+3} < A_{2n+1}$$

3) $A_{2n} < A_{2n+1}$

$$A_{2n+1} - A_{2n} = a_{2n+1} > 0 \Rightarrow A_{2n+1} > A_{2n}$$

4) $(A_{2n+1} - A_{2n}) \rightarrow 0$

$$A_{2n+1} - A_{2n} = (a_{2n+1}) \rightarrow 0 \text{ por ser subsucesión de } (a_n)$$

Entonces $\exists \alpha \in \mathbf{R} / (A_{2n}) \rightarrow \alpha^-$ y $(A_{2n+1}) \rightarrow \alpha^+$, por lo tanto dado un E_α tomando un n lo suficientemente grande conseguiremos que $A_{2n} \in E_\alpha$ y $A_{2n+1} \in E_\alpha$ cualquiera sea n . Esto significa que $(A_n) \rightarrow \alpha$, con lo cual converge por definición.

Teorema (Criterio de Darboux)

$$a_n > 0$$

$$1) \quad SR(a_n) \rightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ 0^- \end{cases} \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n \text{ NC}$$

$$2) \quad SR(a_n) \rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} a_n \text{ C}$$

Demostración: 1) aplicando nuevamente la definición de límite podemos probar que:

$$\forall n \geq n_0, SR(a_n) < 0 \Rightarrow n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 0 \Rightarrow 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1} \text{ por lo que } (a_n) \text{ es}$$

monótona creciente $\Rightarrow (a_n)$ no tiende a cero \Rightarrow no converge.

2) probaremos que la serie cumple con el criterio de Leibnitz.

$$\forall n \geq n_0, SR(a_n) > 0 \Rightarrow n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > 0 \Rightarrow 1 > \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n > a_{n+1} \text{ por lo que } (a_n) \text{ es}$$

monótona decreciente. Falta probar que $(a_n) \rightarrow 0$.

Tomamos $\beta / 0 < \beta < \alpha$ y consideramos entornos disjuntos de los mismos

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, SR\left(\frac{1}{n^\beta}\right) < SR(a_n) \Rightarrow n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > n \left(1 - \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} \right) \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1} \right)^\beta$$

Multiplicando ordenadamente las desigualdades siguientes:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \left(\frac{n-1}{n} \right)^\beta, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < \left(\frac{n-2}{n-1} \right)^\beta, \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} < \left(\frac{n-3}{n-2} \right)^\beta, \dots, \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \left(\frac{n_0}{n_0+1} \right)^\beta$$

resulta que:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \dots \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n_0}{n_0+1} \right)^\beta \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n_0}} < \left(\frac{n_0}{n} \right)^\beta$$

Pero $0 < a_n < a_{n_0} \left(\frac{n_0}{n} \right)^\beta$ y por el teorema de la sucesión comprendida tenemos que

$(a_n) \rightarrow 0$ como queríamos.

SERIES TELESCÓPICAS

Definición: $\sum a_n$ es telescópica cuando $a_n = x_n - x_{n+1}$ y (x_n) es una sucesión.

Ejemplo: $(a_n) / a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$(b_n) / b_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$$

Teorema

$$a_n = x_n - x_{n+1} \quad \sum a_n \text{ C} \Leftrightarrow (x_n) \rightarrow x \in \mathbf{R}$$

Demostración:

Sea $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}$

$(\Rightarrow) (A_n) \rightarrow \alpha$ entonces $A_{n-1} = x_1 - x_n \Rightarrow x_n = x_1 - A_{n-1} \Rightarrow (x_n) \rightarrow x_1 - \alpha$

$(\Leftarrow) (x_n) \rightarrow x \Rightarrow (A_n) = (x_1 - x_{n+1}) \rightarrow x_1 - x$

Ejemplo: halle la suma de la serie $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$

Descomponiendo en fracciones simples (se verá en clase) tenemos que

$$\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{n+1}$$

para $n = 2$ $\frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{3}$

$n = 3$ $\frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4}$

$n = 4$ $\frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{5}$

$n = 5$ $\frac{\frac{1}{2}}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{\frac{1}{2}}{6}$

\vdots \vdots \vdots \vdots

$n = n$ $\frac{\frac{1}{2}}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{\frac{1}{2}}{n+1} \rightarrow 0$ (ver triángulo superior)

Se deduce entonces que la suma es $\frac{1}{4}$ o sea que $\sum_2^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{4}$