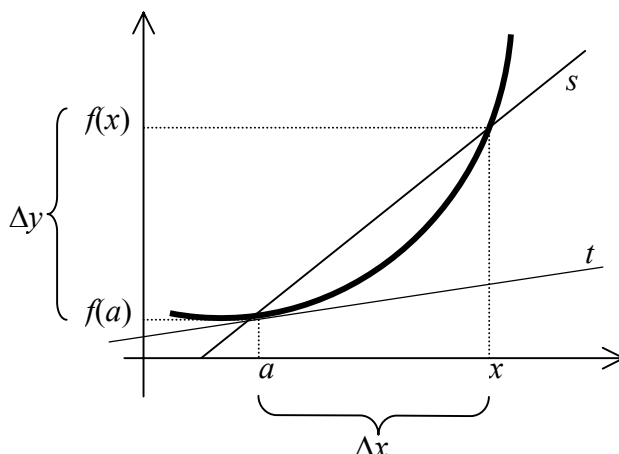


DERIVADA



DERIVADA EN UN PUNTO

Definición: f derivable en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ (finito)

La tangente a f en $x = a$ tiene ecuación: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Haciendo: $x - a = \Delta x$, como $x \rightarrow a \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$, $f(x) - f(a) = \Delta y$

FUNCIÓN DERIVADA

Definición: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ igualmente $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

Ejemplos de cálculo de derivadas usando la definición:

a) Usando la definición de derivada en un punto

$$f(x) = x^\alpha \text{ en } x = 3 \Rightarrow f'(3) = \alpha 3^{\alpha-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^\alpha - 3^\alpha}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^\alpha \left[\left(\frac{x}{3} \right)^\alpha - 1 \right]}{x - 3} \approx \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^\alpha \alpha \left(\frac{x}{3} - 1 \right)}{x - 3} \approx \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^\alpha \alpha \left(\frac{x - 3}{3} \right)}{x - 3} \approx$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^\alpha \alpha (x - 3)}{3(x - 3)} = \frac{3^\alpha \alpha}{3} = \alpha 3^{\alpha-1}$$

b) Usando la definición de función derivada

$$f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^\alpha - 1 \right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^\alpha - 1 \right]}{\Delta x} \approx$$

$$\approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} \approx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \alpha \Delta x}{x \Delta x} = \frac{x^\alpha \alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Teorema

f derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a

Demostración: la existencia de $f'(a)$ implica la existencia de $f(a)$, de lo contrario no tendría sentido el cociente incremental.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) + f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(a)(x - a) + f(a) = f(a)$ este resultado es válido ya que el primer sumando tiende a cero y el segundo es constante. Hemos obtenido $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, que es la definición de función continua en a como queríamos.

OBSERVACIONES:

El recíproco del teorema no es válido, por ejemplo las funciones $|x|$ y $\sqrt[3]{x}$ son continuas en cero y no derivables en dicho punto, para justificarlo basta un ejemplo.

Sea la función $f: f(x) = |x|$

Esta función, continua para todo x (y por lo tanto también en 0), no es derivable en 0.

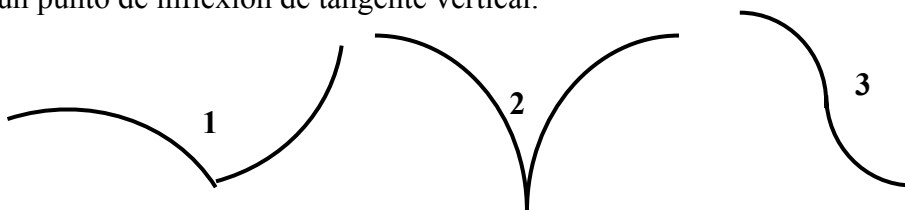
En efecto, si tratamos de calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ llegaremos a la conclusión de que no existe.

dicho límite, ya que los límites laterales son diferentes entre sí:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \end{cases}$$

Definición: f es singular en $a \Leftrightarrow f$ es continua en a y f no derivable en a .

1. Si al menos uno de los límites laterales de la derivada es finito, decimos que es un punto anguloso.
2. Si ambos límites laterales de la derivada son infinitos de distinto signo, decimos que es un punto de retroceso.
3. Si ambos límites laterales de la derivada son infinitos de igual signo, decimos que es un punto de inflexión de tangente vertical.



Derivada de la suma, producto y cociente.

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ derivable en } a \\ g \text{ derivable en } a \end{array} \right\} \Rightarrow (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Demostración: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} =$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ derivable en } a \\ g \text{ derivable en } a \end{array} \right\} \Rightarrow (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Demostración: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a)g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

por la continuidad de g en a $\xrightarrow{\quad \quad \quad \uparrow}$

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ derivable en } a \\ g \text{ derivable en } a \\ g(a) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Demostración: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a)}}{x-a} =$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a)(x-a)} =$
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) g(a) - f(a) \left(\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)}{g(x) \cdot g(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

por la continuidad de g en a $\xrightarrow{\quad \quad \quad \uparrow}$

Teorema (derivada de la función compuesta)

H) $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, derivables

T) $y = f(\varphi(x))$ es derivable y se cumple $[f(\varphi(x))]' = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x)$

Demostración: $y = f(u)$ es derivable $\Rightarrow \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$ por lo tanto

$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \varepsilon(u, \Delta u)$, con $\varepsilon \rightarrow 0$ para $\Delta u \rightarrow 0$, completamos la definición diciendo

que $\varepsilon(u, 0) = 0$, con lo cual $\varepsilon(u, \Delta u)$ es continua en cero.

$\Delta y = f'(u) \Delta u + \varepsilon(u, \Delta u) \Delta u$, esto vale cualquiera sea Δu , aún con $\Delta u = 0$ y dividiendo

por $\Delta x \neq 0$, ya que ese caso no interesa, tenemos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon(u, \Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(u)}_{f'(u)} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(u, \Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}}_0 = f'(u) \cdot u'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

Teorema (derivada de la función inversa)

H) $y = f(x)$ es derivable, existe la función inversa $x = \varphi(y)$ continua, $y'_x \neq 0$

T) $x = \varphi(y)$ es derivable y se cumple $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

Demostración: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$ como $y' \neq 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{y'(x)}$ por teorema del límite

inverso. $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$

$$\downarrow$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO PUNTUAL.

Sea f una función y sea $a \in D(f)$

Definición: f creciente en $a \Leftrightarrow \exists E_a^* / \begin{cases} \forall x \in E_a^* f(x) \leq f(a) \\ \forall x \in E_a^+ f(x) \geq f(a) \end{cases}$

f creciente estricta en $a \Leftrightarrow \exists E_a^* / \begin{cases} \forall x \in E_a^* f(x) < f(a) \\ \forall x \in E_a^+ f(x) > f(a) \end{cases}$

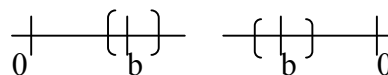
En forma análoga se define el decrecimiento.

Teorema (de conservación del signo)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0 \Rightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^* , \text{sg}(f(x)) = \text{sg}(b)$$

Demostración: dado $b \neq 0$, tomamos un $E_b / 0 \notin E_b$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) \in E_b$$



Pero en todos los casos $f(x) \in E_b \Rightarrow \text{sg}(f(x)) = \text{sg}(b)$

Teorema

$f'(a) > 0 \Rightarrow f$ estrictamente creciente en a .

$f'(a) < 0 \Rightarrow f$ estrictamente decreciente en a .

Demostración: sea $g: g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = f'(a) > 0$ por definición de

derivada y por el teorema de conservación del signo, tenemos que $\exists E_a^* / \forall x \in E_a^*$,

$$\text{sg}(g(x)) = \text{sg}(f'(a)) \Rightarrow \forall x \in E_a^*, g(x) > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

$$\text{Sea } x \in E_a^{*+}, x > a \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$$

$$\text{Sea } x \in E_a^{*-}, x < a \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a) \quad \left. \vphantom{\text{Sea } x \in E_a^{*-}} \right\} \text{ se cumple la definición de crecimiento estricto en } a.$$

Se razona de igual forma cuando $f'(a) < 0$.

Definición: $f(a)$ es máximo relativo de $f \Leftrightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) \leq f(a)$

$f(a)$ es mínimo relativo de $f \Leftrightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) \geq f(a)$

$f(a)$ es máximo relativo estricto de $f \Leftrightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) < f(a)$

$f(a)$ es mínimo relativo estricto de $f \Leftrightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) > f(a)$

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} \exists f'(a) \\ f(a) \text{ es máximo o mínimo relativo} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(a) = 0$$

Demostración: si fuera $f'(a) > 0$, f sería estrictamente creciente en $a \Rightarrow$ no hay máximo ni mínimo relativo.

Si fuera $f'(a) < 0$, f sería estrictamente decreciente en $a \Rightarrow$ no hay máximo ni mínimo relativo.

La única posibilidad que queda es que $f'(a) = 0$.

OBSERVACION: no son válidos los recíprocos de los dos teoremas anteriores.

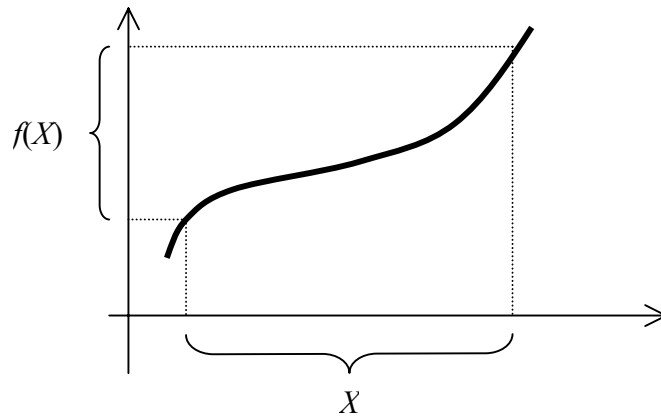
Ejemplo: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$; si bien $f'(0) = 0$, $f(0)$ no es extremo relativo de f por ser creciente en cero. Y pese a no ser $f'(0) > 0$, f es creciente en cero.

Acotación y extremos de una función en subconjuntos de su dominio

Sea $f: A \rightarrow B$ una función y sea $X \subset A$; para cada $x \in X$, existe un imagen $f(x) \in B$.

Llamaremos $f(X)$ al conjunto de los $f(x)$ así obtenidos.

Definición: si $X \subset D(f)$, $f(X) = \{z / z = f(x), x \in X\}$



Definición: f es acotada en $X \subset D(f) \Leftrightarrow f(X)$ está acotada.
 h es cota inferior (superior) de f en $X \subset D(f) \Leftrightarrow h$ es cota inferior (superior) de $f(X)$.
 m es máximo (mínimo) de f en $X \subset D(f) \Leftrightarrow m$ es máximo (mínimo) de $f(X)$.
 e es extremo de f en $X \subset D(f) \Leftrightarrow e$ es extremo de $f(X)$.

Definición: f continua en $X \subset D(f) \Leftrightarrow f$ es continua $\forall x \in X$

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ acotada en } A \\ f \text{ acotada en } B \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ acotada en } A \cup B$$

Demostración: f acotada en $A \Rightarrow f(A)$ acotada $\Rightarrow \forall x \in A, h_1 \leq f(x) \leq k_1$
 f acotada en $B \Rightarrow f(B)$ acotada $\Rightarrow \forall x \in B, h_2 \leq f(x) \leq k_2$
 $\forall x \in A \cup B, \min(h_1, h_2) \leq f(x) \leq \max(k_1, k_2) \Rightarrow f(A \cup B)$ acotado $\Rightarrow f$ acotada en $A \cup B$.

Teorema (o lema) de WEIERSTRASS – 1

$$f \text{ continua en } [a,b] \Rightarrow f \text{ acotada en } [a,b]$$

Demostración: f acotada en $[a,b] \Leftrightarrow f([a,b])$ acotado $\Leftrightarrow \exists h$ y k reales tales que $\forall x$ perteneciente $[a,b], h < f(x) < k$.

Supongamos por absurdo que esto no es cierto.

Sea $m = \frac{a+b}{2}$, y consideremos $[a,m]$ y $[m,b]$, en uno al menos de estos dos intervalos f

no está acotada, pues si estuviera acotada en ambos, lo estaría en la unión, contra lo supuesto. Llamaremos $[a_1, b_1]$ al intervalo en que f no está acotada.

Sea ahora $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$; y consideremos $[a_1, m_1]$ y $[m_1, b_1]$, llamaremos $[a_2, b_2]$ a aquel

intervalo en que f no está acotada.

Si reiteramos el proceso iremos obteniendo intervalos $[a_n, b_n]$ en que f no está acotada, por lo tanto se cumplirá en el proceso lo siguiente:

$a_n \leq a_{n+1}$ por lo que (a_n) es monótona creciente.

$b_n \geq b_{n+1}$ por lo que (b_n) es monótona decreciente.

$a_n < b_n$ para todo n , finalmente $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ o sea $(b_n - a_n) \rightarrow 0$

Resulta entonces que (a_n, b_n) forman un **Par de Sucesiones Monótonas Convergentes**

por lo tanto $\exists c$ tal que $a_n \leq c \leq b_n$, $(a_n) \rightarrow c^-$ y $(b_n) \rightarrow c^+$

Como $[a_n, b_n]$ incluido en $[a, b]$, $c \in [a, b] \Rightarrow a \leq a_n \leq c \leq b_n \leq b$

Al ser f continua en $[a, b] \Rightarrow f$ continua en c .

Supongamos $a < c < b$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno de c tal

que para todo x perteneciente a dicho entorno, $f(c) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(c) + \varepsilon$

Pero $(a_n) \rightarrow c^- \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, a_n \in E_c$

$(b_n) \rightarrow c^+ \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_1, b_n \in E_c$

Resulta entonces que $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$ a_n y b_n pertenecen al entorno de c .

Por lo tanto $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$, $[a_n, b_n] \subset E_c$; entonces $x \in [a_n, b_n] \Rightarrow x \in E_c$ y por lo tanto $f(c) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(c) + \varepsilon$

Entonces f está acotada en $[a_n, b_n]$ por $f(c) - \varepsilon$ y $f(c) + \varepsilon$ lo que es absurdo pues supusimos que f no acotada en $[a, b]$ y queda demostrado el teorema.

Si fuera $a = a_n = c$ resultaría que f acotada en $[a, b_n] = [a_n, b_n]$ lo que es absurdo, análogamente se razona si $b = b_n = c$.

Teorema de WEIERSTRASS – 2

f continua en $[a, b] \Rightarrow f$ tiene máximo y mínimo en $[a, b]$

Demostración: f continua en $[a, b] \Rightarrow f$ acotada en $[a, b]$ por teorema anterior.

O sea que f ($[a, b]$) acotado $\Rightarrow f$ ($[a, b]$) tiene extremo superior \bar{e} y extremo inferior \underline{e} en $[a, b]$. Para que el extremo superior sea máximo de un conjunto, debe pertenecer a él, análogamente para el extremo inferior.

Tendríamos que probar entonces que $\bar{e} \in f$ ($[a, b]$) y $\underline{e} \in f$ ($[a, b]$), es decir que existe $x_1 \in [a, b] / f(x_1) = \bar{e}$ y $x_2 \in [a, b] / f(x_2) = \underline{e}$

Trabajaremos con el extremo superior. (análogo razonamiento con extremo inferior).

Supongamos por absurdo que no existe x_1 en las condiciones anteriores, por lo tanto

para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \neq \bar{e}$. Consideremos a g : $g(x) = \frac{1}{\bar{e} - f(x)}$

g es continua en $[a, b]$ por ser cociente de funciones continuas en dicho intervalo y el denominador no se anula.

Al ser g continua en $[a, b]$ le puedo aplicar W1 $\Rightarrow g$ acotada en $[a, b]$.

Podemos escribir que para todo $x \in [a, b]$, $0 < \frac{1}{\bar{e} - f(x)} \leq k$, despejando

convenientemente obtenemos $f(x) \leq \bar{e} - \frac{1}{k}$

Como esto es cierto para todo $x \in [a, b]$ habríamos encontrado una cota superior de f en $[a, b]$ menor que el extremo superior, que por definición es la menor de las cotas superiores, por lo tanto es absurdo.

Si trabajamos con el extremo inferior, con ligeros retoques llegaríamos al absurdo.

Teorema de BOLZANO

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe } c \in (a,b) / f(c) = 0$$

Demostración: sea $m = \frac{a+b}{2}$, $f(m)$ existe porque f es continua en $[a,b] \Rightarrow f$ es

continua en m . Si $f(m) = 0$, hemos demostrado el teorema y encontrado a c .

Si $f(m) \neq 0$, consideramos (a,m) y (m,b) y elegimos aquel intervalo en que las ordenadas de los extremos sean de distintos signo; siempre habrá uno que cumpla dicha condición por hipótesis.

Llamaremos (a_1, b_1) al intervalo así determinado $\Rightarrow f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Tomo $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ y repetimos el proceso, obteniendo $(a_2, b_2) / f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$

Se obtienen así intervalos $(a_n, b_n) / f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, a menos que al tomar algún

$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ resulte $f(m_i) = 0$, en ese caso $m_i = c$ y quedaría demostrado el teorema.

En caso contrario se forma un **P.S.M.C.** (como en W1) con (a_n) y (b_n)

Resulta que $a \leq a_n \leq c \leq b_n \leq b$, $(a_n) \rightarrow c^-$ y $(b_n) \rightarrow c^+$

Sea $a < c < b$, f continua en $c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Supongamos que $f(c) \neq 0$, por el teorema de conservación del signo se cumplirá que: existe $E_c / \forall x \in E_c, \text{sg}(f(x)) = \text{sg}(f(c))$

Como $(a_n) \rightarrow c^- \Rightarrow$ dado un $E_c, \exists n_0 / \forall n \geq n_0, a_n \in E_c \Rightarrow \text{sg}(f(a_n)) = \text{sg}(f(c))$

$(b_n) \rightarrow c^+ \Rightarrow$ dado un $E_c, \exists n_1 / \forall n \geq n_1, b_n \in E_c \Rightarrow \text{sg}(f(b_n)) = \text{sg}(f(c))$

Entonces $\forall n \geq \max(n_0, n_1), \text{sg}(f(a_n)) = \text{sg}(f(c)) = \text{sg}(f(b_n))$ lo que se contradice con la elección de los intervalos, \Rightarrow debe ser $f(c) = 0$

No puede ser $c = a$ ni $c = b$ porque contradice la hipótesis ya que $f(c) = 0$.

Corolario de DARBOUX

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a) < \lambda < f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = \lambda$$

Demostración: sea $g: g(x) = f(x) - \lambda$ en $[a,b]$

g es continua en $[a,b]$, $g(a) = f(a) - \lambda < 0$, $g(b) = f(b) - \lambda > 0$

Si aplicamos el teorema de Bolzano a $g(x) \Rightarrow \exists c \in (a,b) / g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - \lambda = 0$.

Teorema de ROLLE

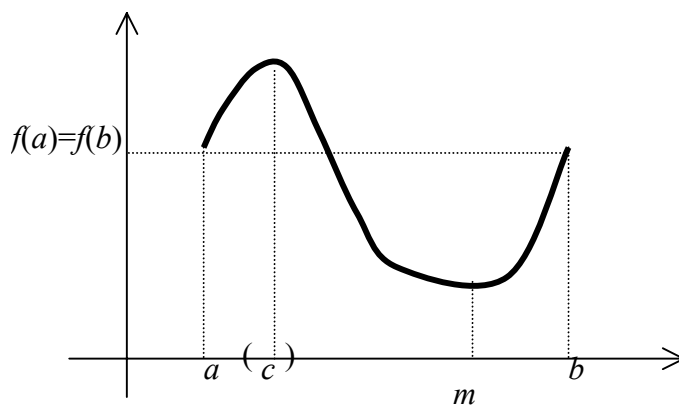
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe } c \in (a,b) / f'(c) = 0$$

Demostración: como f continua en $[a,b]$, por W2, f tiene máximo (\bar{m}) y mínimo (\underline{m}) en $[a,b]$.

Si $\bar{m} = \underline{m}$, como $\forall x \in [a,b], \underline{m} \leq f(x) \leq \bar{m}$, resulta f constante en todo $[a,b]$. Como la derivada de una función constante es nula, resultaría $f'(x) = 0$ en todo (a,b) .

Sea ahora $\bar{m} \neq \underline{m}$, al menos uno de ellos será distinto de $f(a)$ y $f(b)$; supongamos que sea $\bar{m} \neq f(a)$ y $f(b)$. Llamaremos c al punto de $[a,b]$ en que $f(c) = \bar{m}$

Obviamente $c \neq a$ y $c \neq b$ por lo tanto $a < c < b$, digo que $f(c)$ es máximo relativo de f en $[a,b]$, en efecto, en un entorno de c se cumple con la definición, como f es derivable en (a,b) , existe $f'(c)$ y por teorema anterior debe ser $f'(c) = 0$



Teorema de CAUCHY

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ y } g \text{ continuas en } [a,b] \\ f \text{ y } g \text{ derivables en } (a,b) \\ g'(x) \neq 0 \text{ en } (a,b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) / \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración: consideremos $h: h(x) = f(x) + kg(x)$

h es continua en $[a,b]$, por serlo f y g en $[a,b]$

h es derivable en (a,b) , por serlo f y g en (a,b)

Trataremos de aplicar el teorema de Rolle a h , para eso hace falta que $h(a) = h(b)$; debe

ser entonces $f(a) + kg(a) = f(b) + kg(b)$, al despejar k nos queda $k = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Para dicho valor de k , existe por el teorema de Rolle un $c \in (a,b) / h'(c) = 0$, o sea que

como $h'(x) = f'(x) + kg'(x) \Rightarrow h'(c) = f'(c) + kg'(c) = 0 \Rightarrow k = -\frac{f'(c)}{g'(c)}$ y como

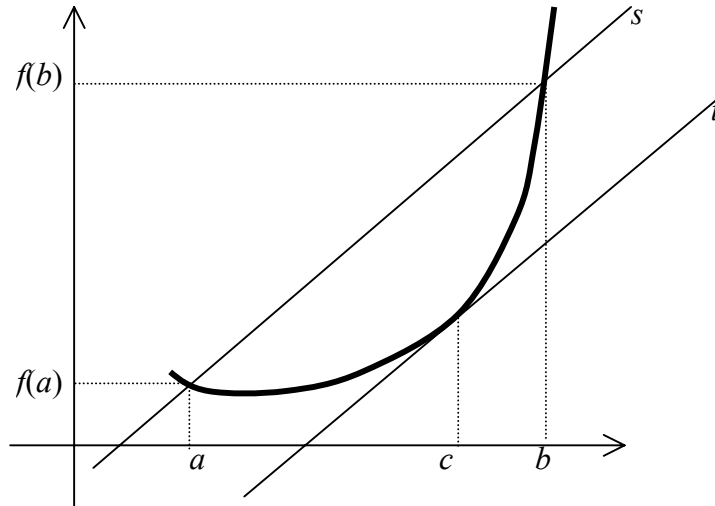
además $g'(c) \neq 0$ por hipótesis, igualando los valores de k queda demostrado el teorema.

Teorema de LAGRANGE

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración: consideremos $g: g(x) = x \cdot f$ y g cumplen con las hipótesis del teorema de Cauchy; ya que g es continua y derivable en \mathbb{R} .

Por lo tanto $\exists c \in (a,b) / \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ y como $g'(c) = 1$, $g(a) = a$, $g(b) = b$, queda demostrado el teorema.



Aplicaciones del teorema de Lagrange

Teorema

$$f \text{ continua en } a \left. \begin{array}{l} \exists E_a^* / \left\{ \begin{array}{l} x < a \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > a \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow f(a) \text{ es m\u00ednimo relativo}$$

Demostraci\u00f3n: tomemos $x_1 \in E_a^* / x_1 < a$; f es derivable en $[x_1, a] \Rightarrow f$ continua en $[x_1, a]$, adem\u00e1s f continua en a , entonces aplicamos Lagrange al intervalo (x_1, a) .

$$\exists c \in (x_1, a) / \frac{f(a) - f(x_1)}{a - x_1} = f'(c) \Rightarrow f(a) - f(x_1) = f'(c)(a - x_1) \text{ y como } c < a \Rightarrow$$

$$f'(c) < 0; a - x_1 > 0 \Rightarrow f(a) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(a) < f(x_1)$$

Tomemos ahora $x_2 \in E_a^* / x_2 > a$; como en el caso anterior podemos aplicar Lagrange

$$\text{al intervalo } (a, x_2) \Rightarrow \exists c' \in (a, x_2) / \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = f'(c') \Rightarrow \text{como } c' > a, f'(c') > 0,$$

$$f(x_2) - f(a) = f'(c')(x_2 - a) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(a)$$

Hemos probado que $\forall x \in E_a^*, f(a) < f(x)$; se cumple por lo tanto la definici\u00f3n de m\u00ednimo relativo.

OBSERVACIONES:

An\u00e1logamente podemos probar los siguientes teoremas:

f continua en a y signo de f' en el entorno reducido de a :

$$\underline{+|-} \Rightarrow f(a) \text{ es m\u00e1ximo relativo}$$

$$\underline{+|+} \Rightarrow f \text{ creciente en } a$$

$$\underline{-|-} \Rightarrow f \text{ decreciente en } a$$

Definición: $A \subset D(f) : f$ creciente en $A \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, x_1 y $x_2 \in A$

Teorema

$$\forall x \in (a,b), f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ creciente estricta en } (a,b)$$

Demostración: como existe f' en (a,b) , f es continua en (a,b) , si tomamos x_1 y x_2 pertenecientes a (a,b) , con $x_1 < x_2$, se podrá aplicar Lagrange en el intervalo (x_1, x_2)

Entonces $\exists c \in (x_1, x_2) / f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, como $c \in (a,b)$, $f'(c) > 0 \Rightarrow$

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ y ésta es la condición de crecimiento estricto en el intervalo.

Teorema

$$\forall x \in (a,b), f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ decreciente estricta en } (a,b)$$

Demostración: análoga a la anterior.

Teorema

$$\forall x \in (a,b), f'(x) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbf{R} / \forall x \in (a,b), f(x) = k$$

Demostración: análoga a la anterior.

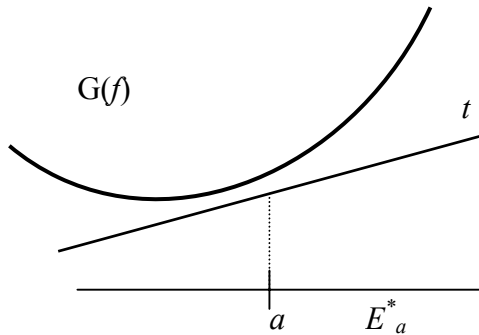
Teorema

$$\forall x \in (a,b), f'(x) = g'(x) \Rightarrow \exists k \in \mathbf{R} / \forall x \in (a,b), f(x) - g(x) = k$$

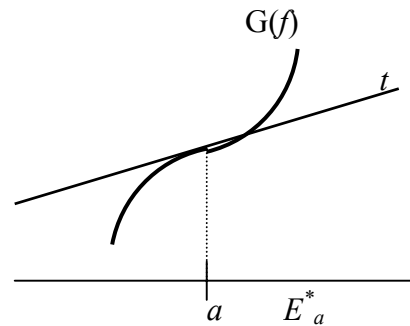
Demostración: sea $d: d(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in (a,b)$

$d'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ y por teorema anterior se deduce que $d(x) = k$ en $(a,b) \Rightarrow f(x) - g(x) = k$

CONCAVIDAD E INFLEXIONES



Concavidad positiva en a



Inflexión en a

Definición:

f presenta concavidad positiva en $a \Leftrightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$

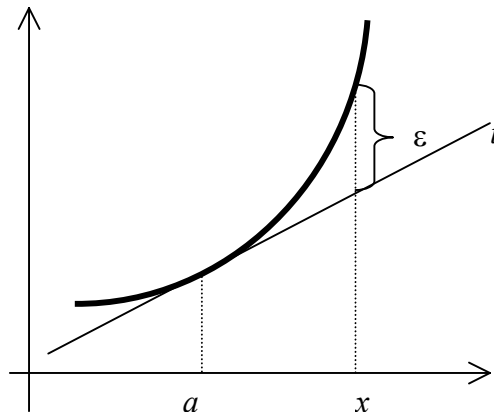
f presenta concavidad negativa en $a \Leftrightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) < f'(a)(x-a) + f(a)$

f presenta inflexión en $a \Leftrightarrow \exists E_a^* / \begin{cases} x \in E_a^-, f(x) < (>) f'(a)(x-a) + f(a) \\ x \in E_a^+, f(x) > (<) f'(a)(x-a) + f(a) \end{cases}$

Teorema

- 1) $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ presenta concavidad positiva en $x = a$
- 2) $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ presenta concavidad negativa en $x = a$

Demostración: 1



Para la demostración consideraremos una función auxiliar que nos da el valor de ϵ , sea entonces $g: g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$ $(t): y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Para demostrar la primera parte será necesario que $g(x) > 0 \forall x \in E_a^*$.

La existencia de $f''(a)$, implica la existencia y continuidad de f' en el E_a ; de la misma forma la existencia de $f'(a)$ implica la existencia y continuidad de f en E_a . Lo dicho garantiza que existe g y es derivable en el E_a^* .

$$g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

$$g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

en los puntos en que f' sea derivable, $g''(x) = f''(x) \Rightarrow g''(a) = f''(a) > 0$ se deduce que g' es creciente estricta en el E_a^* .

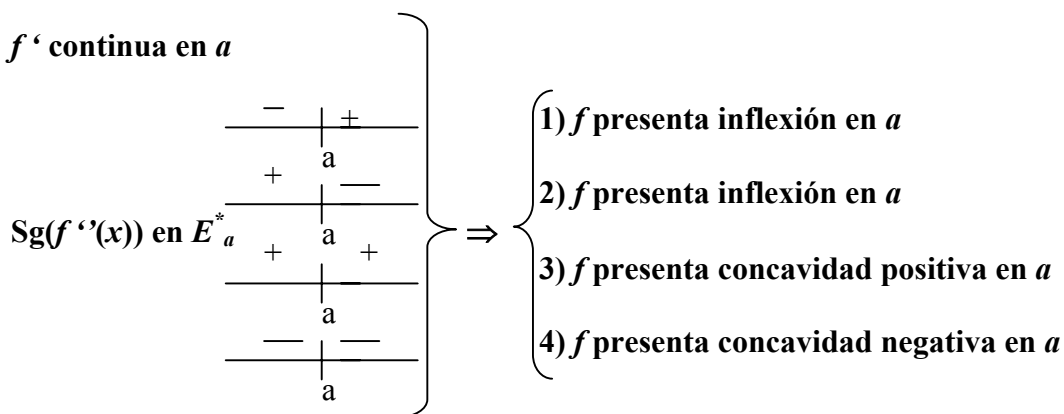
$$\text{Por lo tanto } \exists E_a^* / \begin{cases} \forall x \in E_a^-, g'(x) < g'(a) \\ \forall x \in E_a^+, g'(x) > g'(a) \end{cases}$$

Pero $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0 \Rightarrow$ en E_a^* , signo de $g'(x)$ $\begin{array}{c} 0 \\ - | + \\ a \end{array}$

por un teorema anterior $g(a)$ es mínimo relativo $\Rightarrow \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, g(x) > g(a)$, además $g(a) = 0 \Rightarrow g(x) > 0 \forall x \in E_a^*$ como queríamos.

Teorema

f' continua en a



Demostración: 1 considero $g: g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$ y volvemos a derivarla, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$, $g''(x) = f''(x)$

Entonces el signo de g'' en el E_a^* es $\begin{array}{c} - | + \\ a \end{array}$ como f' es continua en a , g' también lo es, $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$

Por un teorema anterior, $g'(a)$ es un mínimo relativo de $g'(x)$ en el E_a^* o sea que $\forall x \in E_a^*, g'(x) > g'(a) = 0$. Se deduce entonces que g es estrictamente creciente en a .

Por lo que: si $x \in E_a^-, g(x) < g(a)$, $x \in E_a^+, g(x) > g(a)$

O sea que: $x \in E_a^-, f(x) < f'(a)(x - a) + f(a)$

$x \in E_a^+, f(x) > f'(a)(x - a) + f(a)$, lo que significa que hay inflexión en a .

Los casos 2, 3 y 4 se demuestran análogamente.

Teorema

$$f''(x) > 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a), \forall x \in (a, b)$$

Demostración: la existencia de f'' en $[a, b]$ implica la existencia y continuidad de f' y f en $[a, b]$. Tomamos entonces $x \in (a, b)$ y podemos aplicar Lagrange en (a, x) y (x, b) .

$$\exists c_1 \in (a, x) / \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_1), \exists c_2 \in (x, b) / \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(c_2)$$

Como $f''(x) > 0$ en (a, b) , implica que f' es creciente estricta en (a, b)

Por otra parte $a < c_1 < x < c_2 < b$, entonces $a < c_1 < c_2 < b \Rightarrow f'(c_1) < f'(c_2)$

por consiguiente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, como $x-a > 0$ y $b-x > 0$ se cumple

$$[f(x)-f(a)](b-x) < [f(b)-f(x)](x-a)$$

$$f(x)(b-x) - f(a)(b-x) < f(b)(x-a) - f(x)(x-a)$$

$$f(x)(b-x) + f(x)(x-a) < f(b)(x-a) + f(a)(b-x)$$

$$f(x)(b-x+x-a) < f(b)(x-a) + f(a)(b-a+a-x) \leftarrow$$

$$f(x)(b-a) < f(b)(x-a) + f(a)(b-a) + f(a)(a-x)$$

$$f(x)(b-a) < [f(b)-f(a)](x-a) + f(a)(b-a), \text{ como } b-a > 0, \text{ dividido por } b-a$$

por lo que nos queda: $f(x) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$, como queríamos.

Teorema

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b], \quad a < c < b \Rightarrow f(x) > f'(c)(x-c) + f(c), \quad \forall x \in [a,b], \quad x \neq c$$

Demostración: sea $x \in (a,b)$, $x \neq c$, haciendo previamente consideraciones de existencia y continuidad de f y f' como en el teorema anterior, aplicamos Lagrange en (c,x) o (x,c) .

Si $c < x$, $\exists c_1 / c < c_1 < x$ y $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c_1) > f'(c)$ por ser f' creciente en (a,b)

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > f'(c) \Rightarrow f(x) - f(c) > f'(c)(x-c) \Rightarrow f(x) > f'(c)(x-c) + f(c)$$

Si $x < c$, $\exists c_2 / x < c_2 < c$ y $\frac{f(c)-f(x)}{c-x} = f'(c_2) < f'(c)$ por el crecimiento de f'

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x} < f'(c) \Rightarrow f(c) - f(x) < f'(c)(c-x) \Rightarrow f(x) - f(c) > f'(c)(x-c)$$

logrando nuevamente que $f(x) > f'(c)(x-c) + f(c)$ como queríamos.

Teoremas de L'HÔPITAL

OBSERVACIONES: este teorema nos permite calcular el $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ por medio del

$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ en los casos de indeterminación para $\frac{f}{g}$, enunciados en conjunto dicen:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a \text{ o } \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow a \text{ o } \infty} g(x) = 0 \text{ o } \infty \\ \exists \lim_{x \rightarrow a \text{ o } \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a \text{ o } \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a \text{ o } \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostremos sólo uno de los casos a título de ejemplo.

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración: si f y g fueran discontinuas en a , esa discontinuidad se evitaría poniendo $f(a) = g(a) = 0$, lo que no modifica la hipótesis, supongamos que f y g sean continuas en a .

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \text{ o } \infty$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \Rightarrow P/c \ E_b, \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, \frac{f'(x)}{g'(x)} \in E_b$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \Rightarrow P/c \ k > 0, \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| > k$$

En cualquier caso esto implica que existe $f'(x)$ y $g'(x)$ en el $E_a^* \Rightarrow f$ y g continuas en E_a^* y $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno.

Tomo $x \in E_a^*$, se puede aplicar el teorema de Cauchy a f y g en (a, x) o (x, a) según x sea mayor o menor que a respectivamente.

Por lo tanto $\exists c \in (a, x)$ o $(x, a) / \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ como se había supuesto que $f(a) = g(a) = 0$ tenemos que

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, como $x \in E_a^*$, c también, tenemos pues:

$\frac{f'(c)}{g'(c)} \in E_b$ o $\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| > k \Rightarrow \frac{f(c)}{g(c)} \in E_b$ o $\left| \frac{f(c)}{g(c)} \right| > k$ y esto significa que:

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \text{ o } \infty$ como queríamos.

CORRESPONDENCIA INVERSA Y FUNCION INVERSA

Sea $f: A \rightarrow B$, cada elemento de A tiene una imagen en B , consideremos la relación f^{-1} de $B \rightarrow A / y \in A$ es imagen de $x \in B$ en $f^{-1} \Leftrightarrow f(y) = x$
Es importante saber que f^{-1} no siempre es función.

Teorema

Sea f una función; f^{-1} es función $\Leftrightarrow f$ es biyectiva.

Demostración:

(\Rightarrow) f es inyectiva; en efecto sean x e y dos elementos distintos de $D(f)$, $f(x) \neq f(y)$, ya que si $f(x) = f(y) = z$ tendríamos que $f^{-1}(z) = x$, $f^{-1}(z) = y$ con lo que f^{-1} no sería función. (contra lo supuesto)

f es sobreyectiva; sea $w \in C(f)$; entonces $\exists f^{-1}(w) = v$, pero por definición $f(v) = w$; cualquier $w \in C(f)$ es imagen de algún $v \in D(f)$.

(\Leftrightarrow) Si f es biyectiva cada $w \in C(f)$ es imagen de algún elemento de $D(f)$, pues es sobreyectiva; y no más de uno, pues es inyectiva.

Entonces w es imagen de un único $v \in D(f) \Rightarrow f^{-1}(w) = v$ y f^{-1} es una función.

OBSERVACIÓN: como $(f^{-1})^{-1} = f$ resulta que si aplico el teorema anterior a f^{-1} tenemos que f^{-1} es también biyectiva. O sea que f y f^{-1} son biyectivas.

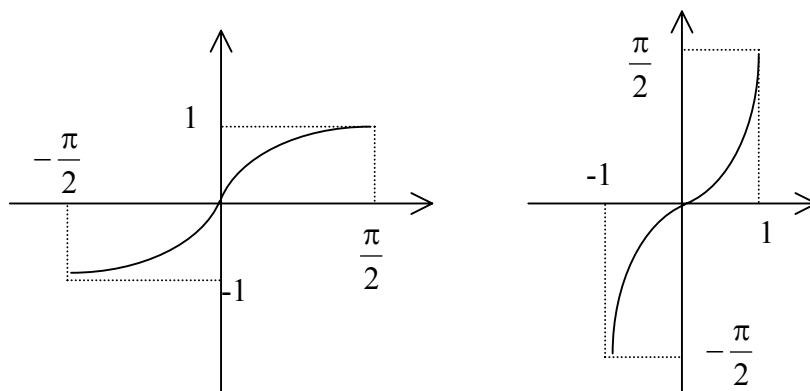
FUNCIONES INVERSAS DE LAS CIRCULARES

Las funciones seno, coseno y tangente son periódicas y por lo tanto no son monótonas en todo su dominio; no puede hablarse entonces de funciones inversas de ellas.

Sin embargo si restringimos dichas funciones a intervalos de su dominio en que sean monótonas estrictas, podremos considerar funciones inversas de ellas.

Sea $f: f(x) = \text{sen } x$ en que $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en dicho intervalo f es continua y monótona

creciente $\Rightarrow f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$ $f^{-1}: f^{-1}(x) = \text{Arcsen } x$



Los gráficos son simétricos respecto a la recta $y = x$ si los representáramos en un mismo sistema.

En forma análoga se puede ver a las funciones $\text{Arcos } x$ y $\text{Arctg } x$.

DERIVADAS DE ORDEN N

Teorema

$$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f^n(x) = \text{sen}\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

Demostración: por inducción, para $n = 1$ $f'(x) = \cos x = \text{sen}\left(x + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

Se cumple para $n = h \Rightarrow f^{(h)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + h \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

Para $n = h+1 \Rightarrow f^{(h+1)}(x) = (f^{(h)}(x))' = \left(\operatorname{sen}\left(x + h \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + h \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + h \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + (h+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ como queríamos.

Teorema

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f^n(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

Demostración: análoga a la anterior.

Teorema

$$f(x) = a^x \Rightarrow f^n(x) = a^x (L a)^n$$

Demostración: por inducción completa.

Teorema de LEIBNITZ

Con el convenio $f^{(0)} = f$ $(f \cdot g)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n f^{(n-i)} \cdot g^i$

Demostración: por inducción completa.

FUNCIONES HIPERBOLICAS

Definición: $\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\operatorname{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$

Valen las fórmulas: $\operatorname{ch}^2x - \operatorname{sh}^2x = 1$ (fórmula fundamental)

$$\operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch}(a) \cdot \operatorname{ch}(b) \pm \operatorname{sh}(a) \cdot \operatorname{sh}(b)$$

$$\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh}(a) \cdot \operatorname{ch}(b) \pm \operatorname{ch}(a) \cdot \operatorname{sh}(b)$$

Teorema de TAYLOR

H) $f^{(n-1)}$ continua en $[a,b]$, $f^{(n-1)}$ derivable en (a,b)

T) $\exists c \in (a,b)$ /

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)(b-a)}{1!} + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^n(c)(b-c)^{n-p}(b-a)^p}{(n-1)!p}$$

Demostración: sea $G(x) = (b-x)^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ y

$$F(x) = f(b) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)(b-x)}{1!} + \frac{f''(x)(b-x)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

F y G son continuas en $[a,b]$, F por hipótesis y G por ser un polinomio.

F y G son derivables en (a,b) , F por ser suma y producto de funciones derivables y G por ser un polinomio.

$G'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$, en efecto G' se anula sólo para $x = b$.

Por lo tanto podemos aplicar el teorema de Cauchy a F y G en $[a,b]$, en ese caso:

$$\exists c \in (a,b) / \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \text{ como además } F(b) = G(b) = 0 \Rightarrow \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F'(a)}{G'(a)} \Rightarrow$$

$$F(a) = \frac{F'(c).G(a)}{G'(c)} \quad \text{Calcularemos ahora } F'(x) \text{ y } G'(x)$$

$$G'(x) = -p(b-x)^{p-1}$$

$$F'(x) = - \left\{ f'(x) + \frac{f''(x)(b-x)}{1!} + \frac{f'(x)(-1)}{1!} + \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{f''(x)2(b-x)(-1)}{2!} + \dots \right. \\ \left. + \frac{f^n(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{n-1}(x)(n-1)(b-x)^{n-2}(-1)}{(n-1)!} \right\} = - \frac{f^n(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

pues todos los términos restantes son opuestos 2 a 2.

$$\rightarrow F(a) = f(b) - \left\{ f(a) + \frac{f'(a)(b-a)}{1!} + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right\} =$$

$$\rightarrow \frac{F'(c).G(a)}{G'(c)} = \frac{-f^n(c)(b-c)^{n-1}(b-a)^p}{-(n-1)!p(b-c)^{p-1}} \quad (\text{término de Schlömilch})$$

Operando se llega a la tésis y queda demostrado el teorema. Para $p = n$ el término de Schlömilch se transforma en el término complementario de Lagrange.

$$T_L = \frac{f^n(c)(b-a)^n}{n!}$$

Corolario (o fórmula) de Mc. LAURIN

H) $f^{(n-1)}$ continua en $[0, x]$, $f^{(n-1)}$ derivable en $(0, x)$

$$T) \exists c \in (0,x) / f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^n(c)x^n}{n!}$$

Demostración: es la fórmula de Taylor con T_L y aplicada en el intervalo $[0, x]$

Ejemplos:

$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \dots = f^n(x); f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^n(0) = 1$$

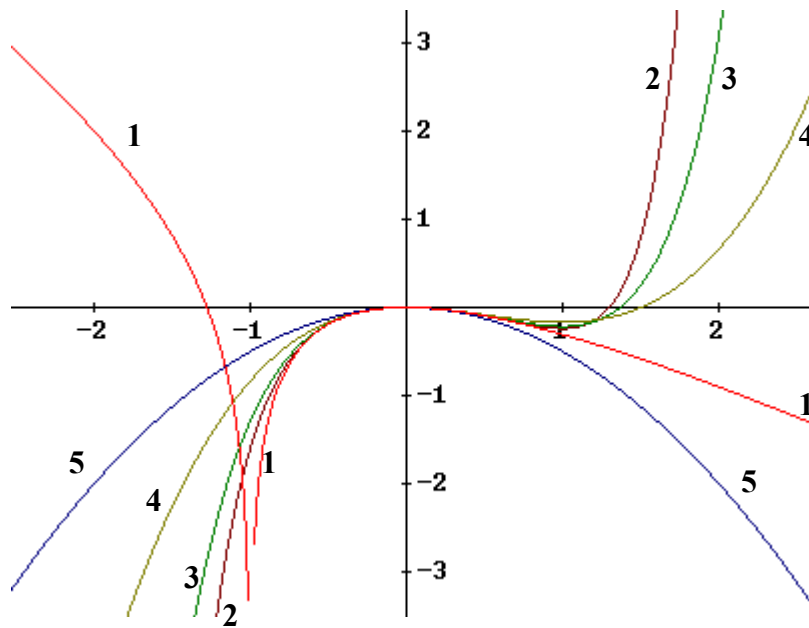
Por lo tanto el desarrollo de la función e^x según el teorema de Mc. Laurin será:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{(n+1)} \frac{x^n}{n}$$

Representamos a la función f y su desarrollo con distintos grados de aproximación en $x = 0$, observe el comportamiento de las curvas en dicho punto. Esta característica nos permite sustituir a la función por un polinomio de grado prefijado en dicho punto y aprovechar las ventajas que éstos nos brindan.

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 - $f(x) = L x + 1 - x$ | 2 - $f(x) \approx -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}$ |
| 3 - $f(x) \approx -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ | 4 - $f(x) \approx -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ 5 - $f(x) \approx -\frac{x^2}{2}$ |



DIVISIÓN CRECIENTE DE POLINOMIOS

Sean P y D dos polinomios y D tiene término independiente no nulo. Dado $n \in \mathbb{N}$, existen dos polinomios únicos (Q y R) tales que $\mathbf{P} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{x}^n$ con $\text{gr}(Q) < n$

Aceptando la existencia y unicidad de dicha división, mostramos un ejemplo:

Sea $P(x) = 2x - 5x^2 + 4x^3$ y $D(x) = 1 - x + 4x^2$ $n = 3$

$$\begin{array}{r|l} 2x - 5x^2 + 4x^3 & 1 - x + 4x^2 \\ \hline -2x + 2x^2 - 8x^3 & 2x - 3x^2 \\ \hline -3x^2 - 4x^3 & \\ \hline +3x^2 - 3x^3 & \\ \hline -7x^3 + 12x^4 & \end{array}$$

$$Q(x) = 2x - 3x^2 \quad R(x) = -7x^3 - 12x^4$$

$$\text{Tenemos entonces } P(x) = D(x)(2x - 3x^2) + x^3(-7 + 12x)$$

Ejemplo:

Halle el equivalente de la función $f: f(x) = \text{sen} \left(\frac{2x - 5x^2 + 4x^3}{1 - x + 4x^2} \right) - L(1 + 2x)$ en $x = 0$

Vimos anteriormente que $\frac{P(x)}{D(x)} \approx 2x - 3x^2 \Rightarrow \text{sen} \left(\frac{2x - 5x^2 + 4x^3}{1 - x + 4x^2} \right) \approx \text{sen}(2x - 3x^2)$

Usando los correspondientes equivalentes tenemos que:

$$(2x - 3x^2) - (2x) = -3x^2 \Rightarrow f(x) \approx -3x^2$$

Observe las representaciones gráficas respectivas.

