VALORES ABSOLUTOS

Definición: si $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$, si $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

Por lo tanto $|a| \geq 0 \ \forall a \in R$

Teorema

$$|a|^2 = a^2$$

Demostración: si $a \geq 0 \Rightarrow |a|^2 = a^2$, si $a < 0 \Rightarrow |a|^2 = (-a)^2 = a^2$

PROPIEDADES

$|a.b| = |a|.|b|$ $\quad |a^n| = |a|^n$ $\quad -|a| \leq a \leq |a|$ $\quad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular)

Teorema

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Demostración: $|x| \leq a \Leftrightarrow |x|^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0$, resolviendo la inecuación se obtiene la tésis.

Teorema

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración: de $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$, sumando nos queda
$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ y por teorema anterior $|a + b| \leq |a| + |b|$

Definición: función signo de x = sg(x)
si $x > 0 \Rightarrow sg(x) = 1$ $\quad x < 0 \Rightarrow sg(x) = -1$ $\quad x = 0 \Rightarrow sg(x) = 0$ entonces **|x| = sg(x) x**

COTAS Y EXTREMOS DE CONJUNTOS DE NUMEROS REALES

Sea C un conjunto de números reales
Definición:

$h \in R$ es cota inferior de C $\Leftrightarrow \forall x \in C$, $h \leq x$.
$k \in R$ es cota superior de C $\Leftrightarrow \forall x \in C$, $k \geq x$.
C es acotado inferiormente $\Leftrightarrow \exists$ h, cota inferior de C.
C es acotado superiormente $\Leftrightarrow \exists$ k, cota superior de C.
C es acotado $\Leftrightarrow \exists$ h y k / $\forall x \in C$, $h \leq x \leq k$.
M es máximo de C $\Leftrightarrow$ M es cota superior de C y $M \in C$.
m es mínimo de C $\Leftrightarrow$ m es cota inferior de C y $m \in C$.

Teorema

El máximo y el mínimo de un conjunto, si existen son únicos.

<u>Demostración</u>: supongamos que M_1 y M_2 son máximos de C
$\forall x \in C$, $x \leq M_1$ y $x \leq M_2$. Como $M_1 \in C \Rightarrow M_1 \leq M_2$ y como $M_2 \in C \Rightarrow M_2 \leq M_1$
por lo tanto $M_1 = M_2$. Análogamente para el mínimo.

Definición:

Se llama extremo superior de C a la mínima cota superior de C.
Se llama extremo inferior de C a la máxima cota inferior de C.

<u>NOTACIÓN</u> Dados a y b reales, $a < b$, llamaremos:
Intervalo cerrado $[a,b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$
Intervalo abierto $(a,b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$
Intervalo semiabierto $[a,b) = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$
Entorno de $x = E_x$
Entorno (simétrico) de x de radio $\varepsilon = E_{x,\varepsilon} = (x-\varepsilon\, ,\, x+\varepsilon)$

<u>SUCESIONES DE NUMEROS REALES</u>

Una función f es una relación o correspondencia entre dos conjuntos A y B (no vacíos) tal que para cada $x \in A$, existe uno y sólo uno $f(x) \in B$.
A es el dominio de la función.
B es el codominio de la función.

Definición:

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Ejemplos de sucesiones:

$(a_n) \,/\, a_n = 2n + 3$

$(b_n) \,/\, b_n = 2^n$

$(c_n) \,/\, c_n = n^{\frac{3}{2}}$

$(d_n) \,/\, d_n = \dfrac{1}{n}$

Observamos que (d_n) no existe para $n = 0$, así que modificaremos la definición de sucesión para que ésta (u otras de ese tipo) exista.
f es un sucesión $\Leftrightarrow$ f es una función y $\exists\, n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0\, ,\, \exists f(n)$.
Ejemplo de expresiones que **NO** son sucesiones:
$(z_n) \,/\, z_n = \sqrt{5-n}$ no existe para $n > 5$

$(y_n) \,/\, y_n = log_{10}^{10-n}$ no existe para $n \geq 10$

SUCESIONES CONVERGENTES

Tomemos por ejemplo a la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, se puede ver que a medida que tomamos valores de n cada vez mayores, los a_i , o sea los términos de la sucesión son cada vez más pequeños. Por lo que nos "acercamos" al cero tanto como queramos.

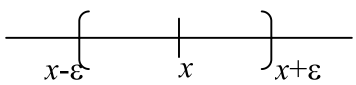
Lo mismo ocurre si consideramos (b_n) / $b_n = \frac{2n+1}{n}$, en la medida que aumenta n, nos aproximamos al 2 tanto como queramos.

Diremos entonces que (a_n) tiende a cero $[(a_n) \to 0]$ o que $(b_n) \to 2$.

Para el primer ejemplo, tomemos un entorno de cero con radio $\varepsilon = \frac{1}{10}$; la sucesión de los a_n para los $n \geq 10$, pertenecen a dicho entorno, o sea que **TODOS** los términos de la sucesión con $n \geq 10$ pertenecen al entorno y sólo un número finito de ellos queda fuera del entorno.

Cualquiera sea el radio elegido, siempre tendremos un número finito de términos de la sucesión que **NO** cumplen con la condición de pertenecer al entorno elegido pero tendremos infinitos términos (todos los restantes) que sí la cumplen.

Definición: $(x_n) \to x$ o $\lim (x_n) = x \Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in N$ / $\forall n \geq n_0$, $x_n \in E_{x,\varepsilon}$



$x_n \in E_{x,\varepsilon} \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

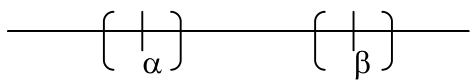
$x_n \in E_{x,\varepsilon} \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$

$x_n \in E_{x,\varepsilon} \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$

Teorema (Unicidad del límite)

$$\left.\begin{array}{l}(x_n) \to \alpha \\ (x_n) \to \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta$$

Demostración: supongamos que (x_n) tiene dos límites diferentes o sea que $(x_n) \to \alpha$ y $(x_n) \to \beta$, $\alpha \neq \beta$ y $\alpha < \beta$. Tomemos entornos disjuntos de α y β ; lo que quiere decir que $E_{\alpha,\varepsilon} \cap E_{\beta,\varepsilon} = \emptyset$



Por lo tanto $\alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon < \beta - \alpha \Rightarrow \varepsilon < \frac{\beta - \alpha}{2}$

Para cada ε que cumpla con dicha condición y aplicando la definición de límite tenemos

$(x_n) \to \alpha \Leftrightarrow \exists\, n_1 \in N$ / $\forall n \geq n_1$, $\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$

$(x_n) \to \beta \Leftrightarrow \exists\, n_2 \in N$ / $\forall n \geq n_2$, $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$

Si tomamos $n \geq \max(n_1, n_2)$ se cumplirá que $x_n < \alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon < x_n \Rightarrow x_n < x_n$ lo cual es absurdo.

Definición: $(x_n) \to \alpha \in R \Leftrightarrow (x_n)$ es convergente

SUCESIONES DIVERGENTES

Tomemos $(x_n) / x_n = n$ o $(y_n) / y_n = (-2)^n$, se puede observar que en la medida que aumenta n, los valores absoluto de dichas sucesiones aumentan. O sea que x_n aumenta conforme aumenta n.
Dado cualquier $k \in R$, $k > 0$, existe $n_0 \in N / \forall n \geq n_0$ se cumple que $|x_n| > k$ o $|y_n| > k$; esto caracteriza a las sucesiones divergentes o sucesiones que tienden a infinito.

Definición:

$(x_n) \to \infty \Leftrightarrow$ para cada $k > 0$, $\exists\, n_0 \in N / \forall n \geq n_0 \quad |x_n| > k$
$(x_n) \to +\infty \Leftrightarrow$ para cada $k > 0$, $\exists\, n_0 \in N / \forall n \geq n_0 \quad x_n > k$
$(x_n) \to -\infty \Leftrightarrow$ para cada $k > 0$, $\exists\, n_0 \in N / \forall n \geq n_0 \quad -x_n > k$ o $x_n < -k$

SUCESIONES OSCILANTES

Consideremos $(a_n) / a_n = (-1)^n$
Como $|a_n| = 1 \Rightarrow (a_n)$ no es divergente, pero como toma valores 1 y –1, según n sea par o impar, tampoco todos los términos de la sucesión caen dentro de un entorno del 1 o del –1, con lo que tampoco es convergente. A estas sucesiones que no son convergentes ni divergentes las llamaremos oscilantes.

Definición: si (x_n) no es convergente ni divergente entonces es oscilante.

SUCESIONES ACOTADAS

Se dice que una sucesión está acotada cuando el conjunto de todos sus términos está acotado.

Definición (x_n) acotado $\Leftrightarrow \exists\, h$ y $k \in R / \forall n \in N$, $h \leq x_n \leq k$

Teorema

$$(a_n) \to a \Rightarrow (a_n) \text{ está acotada}$$

Demostración: o sea que existen h y k reales tales que $\forall n$, $h < a_n < k$.
Como $(a_n) \to a \Rightarrow \forall n \geq n_0$ se cumple que $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$
$\{a_0 , a_1 , a_2 , ..., a_{n_0 - 1}\}$ es un conjunto finito y por lo tanto tiene máximo M y mínimo m.
Basta entonces tomar como cota inferior al menor entre $\underline{m}$ y $\underline{a - \varepsilon}$, y como cota superior al mayor entre $\underline{M}$ y $\underline{a + \varepsilon}$.

OBSERVACION: el recíproco del teorema es falso ya que existen sucesiones oscilantes que son acotadas, por ejemplo $(-1)^n$.

Teorema

$$\mathbf{(a_n)\ divergente \ \Rightarrow \ (a_n)\ no\ acotada}$$

Demostración: por absurdo.

Teorema

$$\mathbf{(a_n) \to a\ ,\ a > b \ \Rightarrow \ a_n > b \ \ \forall n \geq n_0}$$

Demostración: $\exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0$, $|a_n - a| < \varepsilon$, tomo $\varepsilon = a - b > 0$, por lo tanto $\forall n \geq n_0$
$-(a-b) < a_n - a < a - b \Rightarrow -(a-b) + a < a_n < a - b + a \Rightarrow b < a_n$

Corolario

$$\mathbf{(a_n) \to a > 0 \text{ o } (a_n) \to +\infty \ \Rightarrow \ a_n > 0 \ \ \forall n \geq n_0}$$

Demostración: análoga a la anterior, tomando $b = 0$.

Teorema (Sucesión comprendida)

$$\left.\begin{array}{l} (a_n) \to a \\ (b_n) \to a \\ \forall n \geq n_0 \ \ a_n \leq c_n \leq b_n \end{array}\right\} \Rightarrow (c_n) \to a$$

Demostración:
$(a_n) \to a \Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in N \,/\, \forall n \geq n_1 ,\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$
$(b_n) \to a \Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0 \ \exists n_2 \in N \,/\, \forall n \geq n_2 ,\ a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$
Entonces $\forall n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$, $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$ lo que significa que $(c_n) \to a$

Teorema

$$\mathbf{(a_n) \to a \ \Rightarrow \ (a_n - a) \to 0}$$

Demostración: $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$ y por definición de límite nos queda que $(a_n - a) \to 0$ como queríamos.

Criterio de convergencia de Cauchy
Definición: (a_n) **C** $\Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \,/\, \forall n' \geq n_0$ y $n'' \geq n_0$, $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$

OPERACIONES CON LIMITES

SUMA

a_n	b_n	$a_n + b_n$
a	b	a + b
∞	acotada	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indet.

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(a_n) \to a \\ (b_n) \to b\end{array}\right\} \Rightarrow (a_n + b_n) \to a + b$$

Demostración: $(a_n + b_n) \to a + b \Leftrightarrow p/c\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ /\ \forall n \geq n_0$
$|(a_n+b_n) - (a+b)| < \varepsilon\ = |(a_n - a) + (b_n - b)| < \varepsilon$
$(a_n) \to a \Leftrightarrow p/c\ \varepsilon_1 > 0\ \exists n_1 \in N\ /\ \forall n \geq n_1\ |a_n - a| < \varepsilon_1$
$(b_n) \to b \Leftrightarrow p/c\ \varepsilon_1 > 0\ \exists n_2 \in N\ /\ \forall n \geq n_2\ |b_n - b| < \varepsilon_1$
$\forall n \geq \max(n_1, n_2)$ y sumando miembro a miembro $|a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon_1$
por propiedad de los valores absolutos $|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon$

basta tomar $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y queda demostrado.

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(a_n) \to +\infty \\ (b_n) \to +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow (a_n + b_n) \to +\infty$$

Demostración: $(a_n + b_n) \to +\infty \Leftrightarrow p/c\ k > 0, \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_0,\ a_n + b_n > k$

$(a_n) \to +\infty \Leftrightarrow p/c\ \dfrac{k}{2} > 0, \exists n_1 \in N / \forall n \geq n_1,\ a_n > \dfrac{k}{2}$

$(b_n) \to +\infty \Leftrightarrow p/c\ \dfrac{k}{2} > 0, \exists n_2 \in N / \forall n \geq n_2,\ b_n > \dfrac{k}{2}$

$\forall n \geq \max(n_1, n_2) = n_0$ y sumando miembro a miembro $a_n + b_n > \dfrac{k}{2} + \dfrac{k}{2} = k$

No haremos estudio respecto a la resta teniendo en cuenta que $a_n - b_n = a_n + (-b_n)$

Teorema

$$(a_n) \to a \Rightarrow (-a_n) \to -a$$

Demostración: $(a_n) \to a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |-a_n - (-a)| < \varepsilon \Rightarrow (-a_n) \to -a$

P R O D U C T O

a_n	b_n	$a_n \,.\, b_n$
0	acot	0
a	b	a.b
∞	$b \neq 0$	∞
∞	∞	∞
0	∞	indet

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(a_n) \to 0 \\ (b_n) \text{ acotada}\end{array}\right\} \Rightarrow (a_n\, b_n) \to 0$$

<u>Demostración</u>: $(a_n\, b_n) \to 0 \iff p/c \;\; \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0 \,,\;\; |a_n\, b_n| < \varepsilon$

$(a_n) \to 0 \;\Rightarrow\; (a_n)$ acotada $\;\Rightarrow\; \forall n \geq n_0 \,,\; |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{k}$

(b_n) acotada $\;\Rightarrow\; \exists\, k \in R,\, k > 0 \,/\, \forall n \,,\; |b_n| < k$

multiplicando miembro a miembro $\;|a_n|\,|b_n| = |a_n\, b_n| < \varepsilon\;$ como queríamos.

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(a_n) \to a \\ (b_n) \to b\end{array}\right\} \Rightarrow (a_n\, b_n) \to a\, b$$

<u>Demostración</u>: $(a_n\, b_n) \to a\, b \iff p/c \;\varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in N \;\forall n \geq n_0 \;\; |a_n\, b_n - a\, b| < \varepsilon$

$|a_n\, b_n - a\, b| \;=\; |a_n\, b_n - a\, b_n + a\, b_n - a\, b| \;=\; |(a_n - a)\, b_n + a\, (b_n - b)| \;\leq$

$\underbrace{|a_n - a|}_{0}\;\underbrace{|b_n|}_{\text{acot}} \;+\; \underbrace{|a|}_{\text{acot}}\;\underbrace{|b_n - b|}_{0} < \varepsilon$

$0 \;\times\;$ acot $\;+\;$ acot $\;\times\; 0$

ya vimos que acotado por cero tiende a cero y haciendo uso de los teoremas sobre la suma queda demostrado el teorema.

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(a_n) \to \infty \\ (b_n) \to b \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow (a_n\, b_n) \to \infty$$

<u>Demostración</u>: $(a_n\, b_n) \to \infty \iff p/c \; k > 0 \;\exists\, n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0 \,,\; |a_n\, b_n| > k$

como $(b_n) \to b \neq 0 \Rightarrow |b_n| > k' > 0 \;\; \forall n \geq n_1$

$(a_n) \to \infty \;\;\Rightarrow |a_n| > \dfrac{k}{k'} > 0 \;\; \forall n \geq n_2$ (multiplicando m.a.m.)

entonces $\forall n \geq n_0 = \max(n_1,\, n_2)\,,\; |a_n|\,|b_n| = |a_n\, b_n| > k' \,\dfrac{k}{k'} > k$ como queríamos.

C O C I E N T E

a_n	b_n	a_n / b_n
a	b≠0	a/b
a≠0	0	∞
∞	acot	∞
acot	∞	0
0	0	indet
∞	∞	indet

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{a_n}) \to \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{a_n} \neq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{n}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_n}}\right) \to \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}$$

<u>Demostración:</u> $\forall n \geq n_0$ se cumple que $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a_n\, a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n|\,|a|} < \varepsilon$$

como $(a_n) \to$ a $\neq 0$, $|a_n| > k > 0$ si $n \geq n_1$
como $(a_n) \to a \Rightarrow (a_n)$ acotada $\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon k |a|$ si $n \geq n_2$
$\forall n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$, $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \frac{\varepsilon k |a|}{k|a|} = \varepsilon$

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{a_n}) \to \mathbf{a} \\ (\mathbf{b_n}) \to \mathbf{b} \neq \mathbf{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}}\right) \to \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

<u>Demostración:</u> $\frac{a_n}{b_n} = a_n \left(\frac{1}{b_n}\right)$ por el teorema anterior y haciendo uso de los teoremas sobre el producto concluímos que $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$

Teorema

$$\left.\begin{array}{l}(\mathbf{b_n}) \to \infty \\ \mathbf{b_n} \neq \mathbf{0}\ \forall \mathbf{n}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b_n}}\right) \to \mathbf{0}$$

<u>Demostración:</u> $(b_n) \to \infty \Leftrightarrow p/c\ \ k > 0\ \ \exists n_0 \in N / \forall n \geq n_0 , |b_n| > k$

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| = \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{k} = \varepsilon \quad \text{basta tomar} \quad \varepsilon = \frac{1}{k}$$

En forma análoga si $\left.\begin{array}{l}(b_n) \to 0 \\ b_n \neq 0 \ \forall n\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{b_n}\right) \to \infty$

Teorema $\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a_n) \to a} \\ \mathbf{(b_n) \to 0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}}\right) \to \infty$

Demostración: $\frac{a_n}{b_n} = a_n . \frac{1}{b_n} \to a \ \infty \to \infty$ por teoremas sobre producto.

Teorema $\left.\begin{array}{l}\mathbf{(a_n)\ acotado} \\ \mathbf{(b_n) \to \infty}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}}\right) \to \mathbf{0}$

Demostración: (a_n) acotado $\Rightarrow \ \exists \alpha \in R \ / \ \forall n \geq n_0 \ , \ |a_n| < \alpha$
$(b_n) \to \infty \ \Rightarrow \ p/c \ k > 0 \ \exists n_1 \in N \ / \ \forall n \geq n_1 \ , \ |b_n| > k$
$\forall n \geq \max(n_0, n_1) \Rightarrow |a_n| < \alpha$ y $|b_n| > k$, ordenando las desigualdades y multiplicando m.a.m. tenemos que $|a_n| k < \alpha |b_n| \ \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{\alpha}{k} = \varepsilon$ basta tomar $k = \frac{\alpha}{\varepsilon}$

LOGARITMACION

No consideraremos el caso más general de una sucesión de la forma $\left(log_{b_n}^{a_n}\right)$ porque el teorema de cambio de base nos permite escribir $log_{b_n}^{a_n} = \frac{log_b^{a_n}}{log_b^{b_n}}$ Alcanzará con estudiar los casos de base constante y usar si hace falta los teoremas relativos al cociente. Se supondrá en todos los casos satisfechas las condiciones de existencia de los logaritmos.

b	a_n	$\log_b^{a_n}$
cualquiera	a > 0	$\log_b^a$
b>1	$+\infty$	$+\infty$
b>1	0^+	$-\infty$
0<b<1	$+\infty$	$-\infty$
0<b<1	0^+	$+\infty$

Teorema

$$\left.\begin{array}{r}(\mathbf{a_n}) \to \mathbf{a} \\ \mathbf{b\ cualquiera}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\log_b^{a_n}\right) \to \log_b^{a}$$

Demostración: $\left(log_b^{a_n}\right) \to log_b^{a} \Leftrightarrow p/c\ \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in N\ /\ \forall n \geq n_0\ \left|log_b^{a_n} - log_b^{a}\right| < \varepsilon$

$\left|log_b^{a_n} - log_b^{a}\right| = \left|log_b^{\frac{a_n}{a}}\right| < \varepsilon$ por lo tanto $-\varepsilon < log_b^{\frac{a_n}{a}} < \varepsilon$

Si $b > 1$, $b^{-\varepsilon} < \dfrac{a_n}{a} < b^{\varepsilon}$ por lo tanto $\dfrac{a_n}{a}$ está en un entorno del 1; $(b^{-\varepsilon}, b^{\varepsilon})$ y esto es cierto porque como $(a_n) \to a \Rightarrow \left(\dfrac{a_n}{a}\right) \to 1$. Análogo si $b < 1$.

Teorema

$$\left.\begin{array}{r}(\mathbf{a_n}) \to +\infty \\ \mathbf{b > 1}\end{array}\right\} \Rightarrow (\log_b^{a_n}) \to +\infty$$

Demostración: $(log_b^{a_n}) \to +\infty \Leftrightarrow p/c\ \ k > 0\ \exists\, n_0 \in N\ /\ \forall n \geq n_0,\ log_b^{a_n} > k$

Como $(a_n) \to +\infty \Rightarrow p/c\ \ k' > 0\ \exists\, n_0 \in N\ /\ \forall n \geq n_0,\ a_n > k'$

$\Rightarrow p/c\ k' > 0\ \exists\, n_0\ /\ \forall n \geq n_0,\ log_b^{a_n} > log_b^{k'}$ basta tomar $k'\ /\ log_b^{k'} \geq k \Rightarrow k' \geq b^k$

Teorema

$$\left.\begin{array}{r}(\mathbf{a_n}) \to 0^+ \\ \mathbf{b > 1}\end{array}\right\} \Rightarrow (\log_b^{a_n}) \to -\infty$$

Demostración: $(log_b^{a_n}) \to -\infty \Leftrightarrow p/c\ \ k > 0\ \exists\, n_0 \in N\ /\ \forall n \geq n_0,\ log_b^{a_n} < -k$

Como $(a_n) \to 0^+ \Rightarrow p/c\ \ \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in N\ /\ \forall n \geq n_0,\ 0 < a_n < \varepsilon$

Por lo tanto $log_b^{a_n} < log_b^{\varepsilon} \leq -k$, basta tomar $\varepsilon \leq b^{-k}$

P O T E N C I A C I O N

Recordemos que $b^{log_b^a} = a \Rightarrow (b_n)^{(a_n)} = b^{log_b^{{b_n}^{a_n}}} = b^{a_n\, log_b^{b_n}}$

Con esta transformación hemos pasado de una potencia de base variable (b_n) a otra de base constante (b). Se presentarán tres casos de indeterminación 1^{∞}, ∞^0, 0^0; en los tres casos resultará en $0 \cdot \infty$ en el exponente.

b	a_n	b^{a_n}
cualquiera	a	b^a
b>1	$+\infty$	$+\infty$
b>1	$-\infty$	0^+
0<b<1	$+\infty$	0^+
0<b<1	$-\infty$	$+\infty$

Teorema

$$(\mathbf{x_n}) \to \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (\mathbf{b}^{\mathbf{x_n}}) \to \mathbf{1}$$

Demostración: si $b = 1 \Rightarrow b^{x_n} = 1^{x_n} = 1$
Si $b > 1$, $(b^{x_n}) \to 1 \;\Rightarrow\; \left| b^{x_n} - 1 \right| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$
Entonces $-\varepsilon < b^{x_n} - 1 < \varepsilon \;\Rightarrow\; 1 - \varepsilon < b^{x_n} < 1 + \varepsilon$
Si $\varepsilon \geq 1 \;\Rightarrow\; 1 - \varepsilon \leq 0 < b^{x_n} < 1 + \varepsilon$
Si $\varepsilon < 1 \;\Rightarrow\; log_b^{1-\varepsilon} < x_n < log_b^{1+\varepsilon}$, como $b > 1$, $1 - \varepsilon < 1$ y $1 + \varepsilon > 1 \;\Rightarrow$
$log_b^{1-\varepsilon} < 0$ y $log_b^{1+\varepsilon} > 0 \;\Rightarrow$ es un entorno del cero y esto es cierto porque $(x_n) \to 0$.
Si $b < 1$ es análogo.

Teorema

$$(\mathbf{a_n}) \to \mathbf{a} \;\Rightarrow\; (\mathbf{b}^{\mathbf{a_n}}) \to \mathbf{b}^{\mathbf{a}}$$

Demostración: $(a_n) \to a \;\Rightarrow\; (a_n - a) \to 0$ por lo tanto

$$b^{a_n} = b^{(a_n - a) + a} = \underbrace{b^{a_n - a}}_{\to 1 \text{ por teorema anterior.}} b^a = 1.b^a = b^a$$

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a_n}) \to +\infty \\ \mathbf{b > 1} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbf{b}^{\mathbf{a_n}}) \to +\infty$$

Demostración: $(b^{a_n}) \to +\infty \Leftrightarrow p/c\; k > 0 \;\; \exists\, n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0 ,\; b^{a_n} > k$
$(a_n) \to +\infty \;\Leftrightarrow p/c\; k' > 0 \;\; \exists\, n_0 \in N \,/\, \forall n \geq n_0 ,\; a_n > k'$
Entonces $\forall n \geq n_0 ,\; b^{a_n} > b^{k'}$ basta tomar $b^{k'} \geq k \;\Rightarrow\; k' \geq log_b^k$

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{a_n}) \to +\infty \\ \mathbf{0 < b < 1} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbf{b}^{\mathbf{a_n}}) \to \mathbf{0}^+$$

Demostración: $(b^{a_n}) \to 0^+ \Leftrightarrow p/c\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N /\ \forall n \geq n_0,\ 0 < b^{a_n} < \varepsilon$

$(a_n) \to +\infty \Leftrightarrow p/c\ k > 0\ \exists n_0 \in N /\ \forall n \geq n_0,\ a_n > k$

Por lo tanto $b^{a_n} < b^k$ basta tomar $\varepsilon = b^k \Rightarrow k = log_b^{\varepsilon}$

SUBSUCESIONES O SUCESIONES CONTENIDAS

Definición: (z_n) es subsucesión de (x_n) o (z_n) está contenida en $(x_n) \Leftrightarrow \exists\ (i_n) / z_n = x_{i_n}$ con $(i_n) \to +\infty$, $i_n \in N$.

Ejemplo: dada (x_n), $(z_n) / z_n = x_{2n}$, $(y_n) / y_n = x_{2n+1}$

(z_n) e (y_n) estan contenidas en (x_n).

Teorema

$$\left.\begin{array}{r}\exists \lim (x_n) \\ (z_n) \text{ es subsucesión de } (x_n)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim(z_n) = \lim(x_n)$$

Demostración:

supongamos que $lim(x_n) = x \Leftrightarrow p/c\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N /\ \forall n \geq n_0,\ |x_n - x| < \varepsilon$
en particular $\forall i_n \geq n_0\ |x_{i_n} - x| < \varepsilon$ y como $z_n = x_{i_n}$ resulta $|z_n - x| < \varepsilon$

pero $(i_n) \to +\infty \Rightarrow p/c\ k > 0\ \exists n_1 \in N /\ \forall n \geq n_1,\ i_n > k$
Tomando $k = n_0$, $\exists n_1 \in N /\ \forall n \geq n_1,\ i_n > n_0 \Rightarrow |z_n - x| < \varepsilon$
o sea que $p/c\ \varepsilon > 0\ \exists n_1 /\ \forall n \geq n_1,\ |z_n - x| < \varepsilon \Rightarrow (z_n) \to x$ por definición.

Supongamos ahora que $lim(x_n) = \infty \Leftrightarrow p/c\ k > 0\ \exists n_0 \in N /\ \forall n \geq n_0,\ |x_n| > k$
en particular $\forall i_n \geq n_0\ |x_{i_n}| > k$ y como $z_n = x_{i_n}$ resulta $|z_n| > k$

Como $(i_n) \to +\infty$, $\forall n \geq n_1$, $i_n > n_0$ entonces nuevamente decimos
$p/c\ k > 0\ \exists n_1 \in N /\ \forall n \geq n_1,\ |z_n| > k \Rightarrow (z_n) \to \infty$ por def. de límite.

OBSERVACIONES:

1) Si (x_n) es oscilante, (z_n) puede ser convergente, divergente u oscilante.
   $(x_n) / x_n = (-1)^n$, $(z_n) / z_n = x_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow$ **C**
   $(w_n) / w_n = x_{5n} = (-1)^{5n}$ es **OSC**
   $(y_n) / y_n = (1 + (-1)^n)\ n$, $(p_n) / p_n = y_{2n} = (1 + (-1)^{2n})\ 2n = 4n \Rightarrow$ **D**
   $(q_n) / q_n = y_{2n+1} = (1 + (-1)^{2n+1})\ 2n+1 = 0 \Rightarrow$ **C**

2) Si (t_n) y (s_n) son dos subsucesiones de (x_n) y $lim(t_n) \neq lim(s_n) \Rightarrow (x_n)$ es **OSC**
   En efecto si existe el $lim(x_n)$, por el teorema anterior $lim(x_n) = lim(t_n) = lim(s_n)$ contra lo supuesto.

3) Si (z_n) es oscilante y (z_n) es subsucesión de $(x_n) \Rightarrow (x_n)$ **OSC**, pues si tuviera límite (z_n) también lo tendría.