

Teorema (de los órdenes)

$$(x_n) \rightarrow +\infty; a > 1; b > 1; \alpha > 0; \beta > 0 \Rightarrow \left[\log_b^{x_n} \right] < \left[x_n^\alpha \right] < \left[a^{x_n} \right] < \left[x_n^{\beta x_n} \right]$$

Este teorema no se demostrará.

Definición: (x_n) es de orden p con respecto a (z_n) cuando $(x_n) \approx (Az_n^p)$
Decimos que (Az_n^p) es la parte principal de (x_n)

LIMITES TRIGONOMETRICOS

Con ayuda de consideraciones geométricas vemos que se cumple:

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$$

Usando dicha desigualdad demostraremos los siguientes teoremas.

Teorema

$$(x_n) \rightarrow 0 \Rightarrow (\operatorname{sen} x_n) \rightarrow 0$$

Demostración: $(\operatorname{sen} x_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow p/c \varepsilon > 0 \exists n_0 / \forall n \geq n_0, |\operatorname{sen} x_n| < \varepsilon$

La desigualdad es obvia si $\varepsilon > 1$, pues $-1 \leq \operatorname{sen} x_n \leq 1$

Supongamos $\varepsilon \leq 1$, $(x_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow p/c \varepsilon > 0 \exists n_1 / \forall n \geq n_1, |x_n| < \varepsilon$

como $\varepsilon \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ se cumple $|\operatorname{sen} x_n| \leq |x_n| < \varepsilon \Rightarrow |\operatorname{sen} x_n| < \varepsilon$ como queríamos.

Teorema

$$(x_n) \rightarrow x \Rightarrow (\operatorname{sen} x_n) \rightarrow \operatorname{sen} x \text{ y } (\operatorname{cos} x_n) \rightarrow \operatorname{cos} x$$

Demostración: demostraremos sólo la primera parte.

$$\operatorname{sen} x_n - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x_n - x}{2} \right) \operatorname{cos} \left(\frac{x_n + x}{2} \right)$$

como $\left(\frac{x_n - x}{2} \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{x_n - x}{2} \right) \rightarrow 0$ y $2 \operatorname{cos} \left(\frac{x_n + x}{2} \right)$ está acotado por -2 y 2

resulta que $(\operatorname{sen} x_n - \operatorname{sen} x) \rightarrow 0$ como queríamos.

La segunda parte se demuestra en forma análoga.

Teorema

$$1) (x_n) \rightarrow x \Rightarrow (\operatorname{tg} x_n) \rightarrow \operatorname{tg} x$$

$$2) (z_n) \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow (\operatorname{tg} z_n) \rightarrow \infty \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Demostración:

$$1) \operatorname{tg} x_n = \frac{\operatorname{sen} x_n}{\operatorname{cos} x_n} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \operatorname{tg} x \quad (\operatorname{cos} x \neq 0)$$

$$2) (\operatorname{tg} z_n) \rightarrow \infty \text{ porque } (\operatorname{cos} z_n) \rightarrow 0 \text{ y } (\operatorname{sen} z_n) \rightarrow \pm 1$$

Teorema

$$\left. \begin{array}{l} (x_n) \rightarrow 0 \\ \forall n \geq n_0 \quad x_n \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \right) \rightarrow 1$$

Demostración: como $(x_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \exists n_1 / \forall n \geq n_1, |x_n| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \forall n \geq \max(n_0, n_1)$ se cumple que $|\operatorname{sen} x_n| \leq |x_n| \leq |\operatorname{tg} x_n|$ y como $x_n \neq 0$ podemos dividir por $|\operatorname{sen} x_n|$

entonces $1 \leq \left| \frac{x_n}{\operatorname{sen} x_n} \right| \leq \frac{1}{|\operatorname{cos} x_n|} \Rightarrow |\operatorname{cos} x_n| \leq \left| \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \right| \leq 1$ al ser $|x_n| < \frac{\pi}{2}$ tenemos

que $\operatorname{cos} x_n > 0$, x_n y $\operatorname{sen} x_n$ son del mismo signo, con lo que podemos omitir los valores absolutos $\operatorname{cos} x_n \leq \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \leq 1$ como $(x_n) \rightarrow 0 \Rightarrow (\operatorname{cos} x_n) \rightarrow 1$ y aplicando el teorema de la sucesión comprendida queda demostrado.

Teorema

$$(x_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} (\operatorname{tg} x_n) \approx (x_n) \\ (1 - \operatorname{cos} x_n) \approx \left(\frac{x_n^2}{2} \right) \end{cases}$$

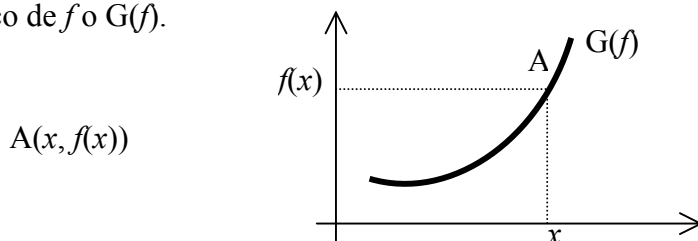
Demostración:

$$\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \cdot \frac{1}{\operatorname{cos} x_n} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{1 - \operatorname{cos} x_n}{\frac{x_n^2}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_n}{2} \right)}{\frac{x_n^2}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_n}{2} \right)}{\frac{1}{2} \frac{x_n^2}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{x_n}{2} \right)}{\left(\frac{x_n}{2} \right)^2} \rightarrow 1$$

FUNCIONES REALES

Se estudiarán funciones cuyo dominio y codominio está formado por números reales. Sea f una función en R , consideremos un sistema de coordenadas xoy en el plano y para cada $x \in D(f)$ tomamos el punto $A(x, f(x))$. El conjunto de todos los puntos así obtenidos se llama gráfico de f o $G(f)$.



LIMITES

Definición: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow p/c E_b, \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) \in E_b$

Si se toman entornos simétricos de a y b se tiene una condición equivalente.

Definición: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow p/c E_{b,\varepsilon}, \exists E_{a,\delta}^* / \forall x \in E_{a,\delta}^*, f(x) \in E_{b,\varepsilon}$
 $\Leftrightarrow p/c \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x$ se cumple $0 < |x - a| < \delta, |f(x) - b| < \varepsilon$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow p/c k > 0, \exists E_{a,\delta}^* / \forall x \in E_{a,\delta}^*, |f(x)| > k$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \Leftrightarrow p/c E_b, \exists h > 0 / \text{si } |x| > h, f(x) \in E_b$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow p/c k > 0, \exists h > 0 / \text{si } |x| > h, |f(x)| > k$

DEFINICION DE LIMITE POR SUCESIONES

Lema 1

$$\left. \begin{array}{l} (x_n) \rightarrow a \\ \forall n \geq n_0, x_n \neq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow p/c E_a^* \exists n_1 / \forall n \geq n_1, x_n \in E_a^*$$

Demostración:

$(\Rightarrow) (x_n) \rightarrow a p/c E_a \exists n_0' / \forall n \geq n_0', x_n \in E_a$
 $\forall n \geq n_1 = \max(n_0, n_0'), x_n \in E_a, x_n \neq a \Rightarrow x_n \in E_a^*$

(\Leftarrow) como $E_a^* \subset E_a, x_n \in E_a^* \Rightarrow x_n \in E_a$, además $x_n \in E_a^* \Rightarrow x_n \neq a$
 En lo que sigue pondremos $(x_n) \rightarrow a, x_n \neq a$, entendiéndose $\forall n \geq n_0$

Lema 2

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{f \text{ función } (x_n) \rightarrow a \text{ (} y_n \text{) } \rightarrow a} \\ \mathbf{x_n \neq a \quad y_n \neq a} \\ \mathbf{\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1) \exists (z_n) / (z_n) \rightarrow a} \\ \mathbf{2) (z_n) \neq a} \\ \mathbf{3) f(z_n) \text{ oscilante}} \end{array} \right.$$

Demostración: consideremos la sucesión (z_n) que se obtiene alternando un término de subíndice par de (x_n) con uno impar de (y_n) , es decir: $z_{2n} = x_{2n}$ y $z_{2n+1} = y_{2n+1}$

- 1) $(z_n) \rightarrow a$, como (x_{2n}) es subsucesión de $(x_n) \Rightarrow (x_{2n}) \rightarrow a$, si $2n \geq n_0$, $z_{2n} \in E_a$
 como (y_{2n+1}) es subsucesión de $(y_n) \Rightarrow (y_{2n+1}) \rightarrow a$, si $2n+1 \geq n_0'$, $z_{2n+1} \in E_a$

Por lo tanto si $n \geq \max(n_0, n_0')$, $(z_n) \in E_a$ o sea que $(z_n) \rightarrow a$

- 2) $z_n \neq a$, es evidente pues $z_{2n} = x_{2n} \neq a$ y $z_{2n+1} = y_{2n+1} \neq a$

- 3) $f(z_n)$ oscilante, $f(x_{2n})$ es subsucesión de $f(x_n) \Rightarrow \lim f(x_{2n}) = \lim f(x_n)$

$f(y_{2n+1})$ es subsucesión de $f(y_n) \Rightarrow \lim f(y_{2n+1}) = \lim f(y_n)$

Pero $f(z_{2n}) = f(x_{2n})$ y $f(z_{2n+1}) = f(y_{2n+1})$ son subsucesiones de $f(z_n)$, entonces $f(z_n)$ tiene dos subsucesiones con límites distintos $\Rightarrow f(z_n)$ oscilante por teo. anterior.

Teorema (de pasaje 1)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ o } \infty} \\ \mathbf{(x_n) \rightarrow a \quad x_n \neq a} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{(f(x_n)) \rightarrow b \text{ o } \infty}$$

Demostración: consideremos el caso en que el límite es b .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow p/c E_b, \exists E_a^* / \forall x \in E_a^*, f(x) \in E_b$$

$$\text{Por lema 1 } \left. \begin{array}{l} (x_n) \rightarrow a \\ \forall n \geq n_0, x_n \neq a \end{array} \right\} \Leftrightarrow p/c E_a^* \exists n_1 / \forall n \geq n_1, x_n \in E_a^*$$

$$\text{Entonces } p/c E_b, \exists n_1 / \forall n \geq n_1, x_n \in E_a^* \Rightarrow f(x_n) \in E_b \Rightarrow (f(x_n)) \rightarrow b$$

La demostración en el caso de límite ∞ es análoga.

Teorema (de pasaje 2)

$$\forall (x_n) \rightarrow a, x_n \neq a, \exists \lim f(x_n) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim f(x_n)$$

Demostración: por el lema 2 sabemos que todas las $f(x_n)$ tienen un mismo límite (b o ∞), ya que si no fuera así podríamos fabricar una $f(z_n)$ oscilante.

Razonaremos en el caso que $(f(x_n)) \rightarrow b$

$$\text{Debemos probar que } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow p/c E_{b \varepsilon}, \exists E_{a \delta}^* / \forall x \in E_{a \delta}^*, f(x) \in E_{b \varepsilon}$$

Supongamos por absurdo que esto es falso, entonces:

$$\exists E_{b \varepsilon}' / p/c E_{a \delta}^*, \exists x \in E_{a \delta}^*, f(x) \notin E_{b \varepsilon}'$$

Consideremos una sucesión $(\delta_n) \rightarrow 0$, $\delta_n > 0 \forall n$, entonces

$$p/c E_{a \delta_n}^*, \exists z_n \in E_{a \delta_n}^* / f(z_n) \notin E_{b \varepsilon}'$$

Pero $a - \delta_n \leq z_n \leq a + \delta_n$, como $(a - \delta_n) \rightarrow a$ y $(a + \delta_n) \rightarrow a \Rightarrow (z_n) \rightarrow a$, $z_n \neq a$

Por hipótesis tendríamos que $\lim f(z_n) = b$ pero esto es absurdo ya que $f(z_n) \notin E_{b \varepsilon}'$

Consideremos ahora que todas las $(f(x_n)) \rightarrow \infty$

Debemos probar que $p/c k > 0 \exists E_{a \delta^*} / \forall x \in E_{a \delta^*}, |f(x)| > k$

Razonando nuevamente por el absurdo $\exists k' > 0 / p/c E_{a \delta^*}, \exists x \in E_{a \delta^*} / |f(x)| \leq k'$

Tomamos nuevamente $(\delta_n) \rightarrow 0, \delta_n > 0 \forall n$ y obtenemos una sucesión $(z_n) \rightarrow a, z_n \neq a / f(z_n) \leq k'$; lo que es absurdo porque $(f(z_n)) \rightarrow \infty$

Corolario

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ o } \infty \Leftrightarrow \forall (x_n) \rightarrow a, x_n \neq a, \lim f(x_n) = b \text{ o } \infty$$

Demostración: (\Rightarrow) de pasaje 1; (\Leftarrow) de pasaje 2

OBSERVACIONES:

- El corolario nos permite obtener una definición equivalente de límite de una función.
- Valen los teoremas análogos a los de pasaje con $x \rightarrow \infty$ o sea que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ o } \infty \Leftrightarrow \forall (x_n) \rightarrow \infty, \lim f(x_n) = b \text{ o } \infty$
- Los teoremas de límites de funciones se reducen a teoremas de límites de sucesiones por lo tanto, todos los teoremas ya demostrados para límites de sucesiones serán válidos para límites de funciones.

CONTINUIDAD

Definición: f continua en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (finito)

- Cuando f es discontinua en a pero existen los límites laterales y son iguales, decimos que f tiene discontinuidad evitable en a .
- Cuando f es discontinua en a y existen los límites laterales, (aunque no tienen por qué ser iguales) decimos que estamos ante una discontinuidad de primera especie.
- Cuando f es discontinua en a y al menos uno de los límites laterales no existe, decimos que la discontinuidad es de segunda especie.

Teorema

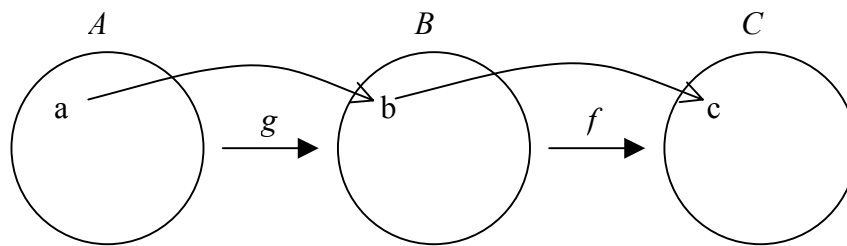
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } a \\ g \text{ continua en } a \end{array} \right\} \Rightarrow f + g \text{ continua en } a$$

Demostración: f continua en $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
 g continua en $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ } $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$ como queríamos.

Análogamente se demuestra la continuidad de la resta, producto y cociente.

FUNCION COMPUESTA

Muchas veces por ejemplo, nos vemos en la necesidad de calcular el valor numérico de una función como ser $y = L(x^2 + 1)$ para $x = 1$. Para lograrlo hacemos lo siguiente: sea $h(x) = x^2$; sea $g(x) = h(x) + 1$; sea $f(x) = L(g(x))$; con lo cual paso a paso podemos calcular el valor de y . Esto es lo que llamamos una función compuesta, en nuestro caso sería: $y = f(g(h(x)))$ o lo que es lo mismo $h \circ g \circ f = y = L(1^2 + 1) = L(2)$



$$a \in A, b \in B, c \in C \Rightarrow g(a) = b, f(b) = c \Rightarrow (g \circ f)(a) = f(g(a)) = c$$

Teorema (límite de la función compuesta)

$$\left. \begin{array}{l} u = \varphi(x), \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = c \\ y = f(u), \lim_{u \rightarrow c} f(u) = b \\ \text{En un entorno de } u, \varphi(x) \neq c \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$$

Demostración: dado $\varepsilon > 0 \exists \gamma > 0 / \text{si } 0 < |u - c| < \gamma, |f(u) - b| < \varepsilon$

$$\exists \delta > 0 / \text{si } 0 < |x - a| < \delta, |\varphi(x) - c| < \gamma \Rightarrow \text{si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(x)) - b| < \varepsilon$$

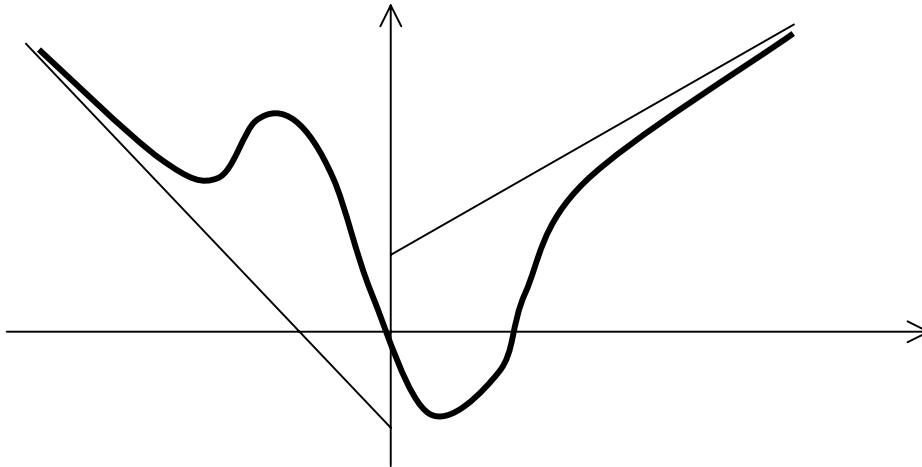
lo que significa que $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = b$

Teorema (continuidad de la función compuesta)

$$\left. \begin{array}{l} u = \varphi(x) \text{ continua en } a \\ y = f(u) \text{ continua en } \varphi(a) \end{array} \right\} \Rightarrow y = f(\varphi(x)) \text{ continua en } a$$

Demostración: $\lim_{x \rightarrow a} f(\varphi(x)) = \lim_{u \rightarrow \varphi(a)} f(u) = f(\varphi(a))$

ASINTOTAS



Existen funciones cuya gráfica se confunde con una recta cuando $x \rightarrow \pm\infty$, en esos casos diremos que la función tiene asíntota y que dicha(s) recta(s) es la asíntota.

Definición: $y = mx + n$ es asíntota en $\pm\infty$ de $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$

Para calcular la asíntota de una función lo haremos de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ (finito)} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = n \text{ (finito)}$$

Si en el cálculo de la asíntota nos encontramos con que m es finito y n infinito, diremos que la función tiene dirección asintótica paralela a $y = mx$.

En cambio si m es infinito, diremos que la función tiene dirección asintótica paralela al eje oy o vertical.