

## SUCESIONES MONOTONAS

**Definición:**  $(a_n)$  es monótona creciente  $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$   
 $(a_n)$  es monótona decreciente  $\Leftrightarrow a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

El crecimiento o decrecimiento estricto se obtiene con  $< o >$ .

### **Teorema**

**$(a_n)$  monótona creciente  $\Rightarrow (a_n)$  tiene límite**

**Demostración:** consideremos dos casos, según  $(a_n)$  esté acotado superiormente o no.

Si  $(a_n)$  está acotado superiormente, sea  $\bar{e}$  su extremo superior. Tomemos un  $E_{\bar{e}, \varepsilon}^-$ ,  $\bar{e} - \varepsilon$  no es cota superior de  $(a_n)$ , ya que  $\bar{e}$  es la mínima cota superior.

$\exists a_{n_0} > \bar{e} - \varepsilon$  por ser  $(a_n)$  monótona creciente.

$\forall n \geq n_0 \ a_n \geq a_{n_0} > \bar{e} - \varepsilon$ , además  $a_n < \bar{e}$  por lo tanto podemos decir que

p/c  $E_{\bar{e}, \varepsilon}^- \exists n_0 / \forall n \geq n_0, a_n \in E_{\bar{e}, \varepsilon}^-$  o sea  $(a_n) \rightarrow \bar{e}$  por definición de límite.

Si  $(a_n)$  no está acotada superiormente, ningún  $k > 0$  será cota, o sea que

p/c  $k > 0 \exists n_0 / a_{n_0} > k \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > k \Rightarrow (a_n) \rightarrow +\infty$  por definición de límite.

## SUCESIONES MONOTONAS CONVERGENTES

Se dice que el par ordenado de sucesiones  $((a_n), (b_n))$  es un P.S.M.C. si se cumplen las condiciones siguientes:

- 1)  $(a_n)$  es monótona creciente
- 2)  $(b_n)$  es monótona decreciente
- 3)  $a_n < b_n \forall n \in \mathbb{N}$
- 4)  $(b_n - a_n) \rightarrow 0$

**Ejemplos:**

Si  $(a_n) / a_n = 1 - \frac{1}{n}$  y  $(b_n) / b_n = 1 + \frac{1}{n}$  forman un PSMC

$$/ a_n = 1 \quad \text{y} \quad / b_n = \sqrt[3]{2}$$

$$/ a_n = \frac{2n-1}{n} \quad \text{y} \quad / b_n = \frac{3n+2}{n} \quad \text{no es un PSMC por no cumplir 4)}$$

## NUMERO e

**Definición:**

Sea  $(a_n) / a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  y  $(b_n) / b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  dichas sucesiones forman un PSMC

cuyo elemento de separación es  $e \approx 2,718281\dots$

## PARTE ENTERA

Dado  $x \in \mathbb{R}$ , considero  $A = \{ z \in \mathbb{Z} / z \leq x \}$  es un conjunto de enteros acotado superiormente por  $x$  y tiene máximo.

**Definición:** parte entera de  $x = E(x) = \max(A)$

**Ejemplos:**  $E(2,718) = 2$ ,  $E(-3,98) = -4$

La definición implica que:  $E(x) \leq x < E(x) + 1$

### Teorema

$$(x_n) \rightarrow \infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e$$

**Demostración:** supongamos que  $(x_n) \rightarrow +\infty$

Sea  $z_n = E(x_n)$ ,  $(z_n) \rightarrow +\infty$ , además  $z_n \leq x_n < z_n + 1$

$$\left(1 + \frac{1}{z_n + 1}\right)^{z_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{z_n}\right)^{z_n + 1} \quad \text{compárese bases y exponentes}$$

pero  $\left(1 + \frac{1}{z_n + 1}\right)^{z_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{z_n + 1}\right)^{z_n + 1}}{\left(1 + \frac{1}{z_n + 1}\right)}$  como  $\left(1 + \frac{1}{z_n + 1}\right) \rightarrow 1$  decimos que

$$\left(1 + \frac{1}{z_n + 1}\right)^{z_n + 1} = a_{z_n + 1} \quad \text{siendo } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ una de las sucesiones que definen a } e.$$

Como  $(z_n + 1) \rightarrow +\infty$ ,  $(a_{z_n + 1})$  es subsucesión de  $(a_n)$  y también tiende a  $e$ .

Análogamente  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{z_n}\right)^{z_n + 1} = b_{z_n}$  por lo tanto  $(b_{z_n}) \rightarrow e$

Resulta entonces  $\frac{a_{z_n + 1}}{1 + \frac{1}{z_n + 1}} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < b_{z_n}$

Y por el teorema de la sucesión comprendida queda demostrado.

### Corolario

$$(a_n) \rightarrow 0 \Rightarrow \left(1 + a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} \rightarrow e$$

Haciendo el cambio de variable  $a_n = \frac{1}{x_n}$  estamos en el teorema anterior.

## SUCESIONES EQUIVALENTES

**Definición:**  $(a_n) \approx (b_n) \Leftrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow 1$

**Teorema**

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim (x_n a_n) \\ (a_n) \approx (b_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim (x_n b_n) = \lim (x_n a_n)$$

**Demostración:**  $x_n b_n = x_n a_n \frac{b_n}{a_n}$  ; como  $(x_n a_n) \rightarrow z \text{ o } \infty$  y  $\frac{b_n}{a_n} \rightarrow 1$  se deduce que  
 $(x_n b_n) \rightarrow z \text{ o } \infty$

**Teorema**

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim \left(\frac{x_n}{a_n}\right) \\ (a_n) \approx (b_n) \end{array} \right\} \Rightarrow \lim \left(\frac{x_n}{b_n}\right) = \lim \left(\frac{x_n}{a_n}\right)$$

**Demostración:**  $\frac{x_n}{b_n} = \frac{x_n}{a_n} \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \left(\frac{x_n}{a_n}\right) \rightarrow z \text{ o } \infty \Rightarrow \left(\frac{x_n}{b_n}\right) \rightarrow z \text{ o } \infty$

Estos teoremas permiten el cambio de un factor o divisor por otro equivalente en el cálculo de límites.

**Teorema**

$$(a_n) \rightarrow 0 \Rightarrow L(1 + a_n) \approx (a_n)$$

**Demostración:**  $(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} \rightarrow e \Rightarrow L(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_n} L(1 + a_n) = \frac{L(1 + a_n)}{a_n} \rightarrow 1$

**Teorema**

$$(b_n) \rightarrow 1 \Rightarrow L(b_n) \approx (b_n - 1)$$

**Demostración:**  $(b_n) \rightarrow 1 \Rightarrow (b_n - 1) \rightarrow 0$  y estamos en el teorema anterior.

**Teorema**

$$(b_n) \rightarrow 0 \Rightarrow (a^{b_n} - 1) \approx b_n L(a)$$

**Demostración:** como  $(a^{b_n}) \rightarrow 1 \Rightarrow L(a^{b_n}) \approx (a^{b_n} - 1) \Rightarrow b_n L(a) \approx (a^{b_n} - 1)$

**Teorema**

$$(z_n) \rightarrow 1 \Rightarrow (z_n^k - 1) \approx k(z_n - 1)$$

**Demostración:**  $L(z_n^k) \approx z_n^k - 1$   $\longleftarrow$   
 $L(z_n^k) = k L(z_n) \approx k(z_n - 1)$   $\longleftarrow$  por transitiva.

**ORDENES**

( DE INFINITESIMOS Y DE LAS SUCESIONES DIVERGENTES )

**Definición:**

R es una relación en el conjunto de las sucesiones;  $(a_n) R (b_n) \Leftrightarrow \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \rightarrow x \neq 0$

(Deben excluirse las sucesiones con infinitos términos nulos.)

**Teorema**

**R es una relación de equivalencia.**

**Demostración:**  $(a_n) R (a_n)$  pues  $\frac{a_n}{a_n} = 1 \Rightarrow \left( \frac{a_n}{a_n} \right) \rightarrow 1 \neq 0$

$$(a_n) R (b_n) \Rightarrow \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \rightarrow \frac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow (b_n) R (a_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} (a_n) R (b_n) \Rightarrow \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \rightarrow x \neq 0 \\ (b_n) R (c_n) \Rightarrow \left( \frac{b_n}{c_n} \right) \rightarrow x' \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \frac{a_n}{c_n} \right) = \left( \frac{a_n}{b_n} \frac{b_n}{c_n} \right) \rightarrow x \cdot x' \neq 0 \quad (a_n) R (c_n)$$

**Definición:** llamaremos orden de una sucesión a su clase de equivalencia según R

## SUCESIONES INFINITESIMAS

**Definición:**  $[a_n] > [b_n] \Leftrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \rightarrow \infty$  con  $(a_n) \rightarrow 0$  y  $(b_n) \rightarrow 0$

### **Teorema**

$$[a_n] > [b_n] \Rightarrow (a_n + b_n) \approx (b_n)$$

**Demostración:**  $\frac{a_n + b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} + 1 \Rightarrow \frac{a_n + b_n}{b_n} \rightarrow 0 + 1$ , pues  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow 0$

Este teorema permite sustituir en una suma de infinitésimos por el de menor orden.

### **Teorema**

$$(a_n) \rightarrow 0, p > q > 0 \Rightarrow [a_n^p] > [a_n^q]$$

**Demostración:**  $\frac{a_n^p}{a_n^q} = a_n^{p-q}$  y  $(a_n^{p-q}) \rightarrow 0 \Rightarrow [a_n^p] > [a_n^q]$

### **Teorema**

$$(a_n) \approx (b_n) \Rightarrow \begin{cases} [a_n - b_n] > [a_n] \\ [a_n - b_n] > [b_n] \end{cases}$$

**Demostración:**  $\frac{a_n - b_n}{a_n} = 1 - \frac{b_n}{a_n}$  como  $\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \rightarrow 1 \Rightarrow \left(\frac{a_n - b_n}{a_n}\right) \rightarrow 0$

Análogamente se demuestra la otra desigualdad.

## SUCESIONES DIVERGENTES

**Definición:**  $[a_n] < [b_n] \Leftrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \rightarrow \infty$  con  $(a_n) \rightarrow \infty$  y  $(b_n) \rightarrow \infty$

Se demuestran teoremas análogos a los anteriores con la diferencia que ahora en la suma el equivalente es el de mayor orden.