

Curso de Matemática A

Sexto de Ingeniería

2006

Instituto Crandon

Este librito contiene los repartidos de práctico, el programa, la bibliografía y otros materiales complementarios del curso de Matemática A de sexto de Ingeniería del Instituto Crandon. Responsable: Profesor Fernando Peláez

SIMPLICIDAD DE LA MATEMÁTICA

Existe una opinión muy generalizada según la cual la matemática es la ciencia más difícil cuando en realidad es la más simple de todas. La causa de esta paradoja reside en el hecho de que, precisamente por su simplicidad, los razonamientos matemáticos equivocados quedan a la vista. En una compleja cuestión de política o arte, hay tantos factores en juego y tantos desconocidos o inaparentes, que es muy difícil distinguir lo verdadero de lo falso. El resultado es que cualquier tonto se cree en condiciones de discutir sobre política o arte -y en verdad lo hace- mientras que mira la matemática desde una respetuosa distancia.

Ernesto Sábato, en "Uno y el Universo" (1945).

Para recordar

$$A C + B C = (A + B) C \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \quad \frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

$$U^2 - V^2 = (U - V)(U + V) \quad U^3 - V^3 = (U - V)(U^2 + UV + V^2)$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \quad (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$$

Observa que (salvo para algunos valores muy particulares de A y B):

$$(A + B)^n \neq A^n + B^n \quad \frac{1}{A + B} \neq \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$$

$$L(A + B) \neq L(A) + L(B) \quad \sqrt[n]{A + B} \neq \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$$

Las únicas funciones (continuas) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen:

$$f(A + B) = f(A) + f(B), \quad \forall A, B \in \mathbb{R}.$$

son las funciones de la forma:

$$f(x) = m x$$

en donde m es constante.

La existencia de raíces reales de $P(x) = ax^2 + bx + c$ depende del signo del “discriminante”: $\Delta = b^2 - 4ac$. Pueden darse los siguientes casos:

1. Si $\Delta > 0$ entonces P tiene dos raíces reales y distintas dadas por

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El gráfico de P corta al eje \overrightarrow{Ox} en dos puntos.

2. Si $\Delta = 0$ entonces la función tiene una sola raíz: $-b/2a$. Su gráfico corta al eje \overrightarrow{Ox} en un solo punto.
3. Si $\Delta < 0$ entonces la función no tiene raíces reales. Su gráfico NO corta al eje \overrightarrow{Ox} .

Capítulo 1

Prácticos

Los dieciséis “repartidos” de práctico que te proponemos cubren todos los temas del curso. Si trabajas en ellos, seguramente adquirirás una profunda comprensión de los conceptos “teóricos”, un buen entrenamiento en las técnicas del **cálculo diferencial** y destreza al momento de aplicarlo en otras ramas de la Ciencia, en particular la Física. Además, esperamos que te ayuden a desarrollar tus capacidades de investigación y de resolución de problemas.

Los prácticos están diferenciados por áreas temáticas y no todos tienen la misma extensión. Sobre la marcha te indicaremos cuántas semanas debes dedicarle a cada uno. De todos modos, ya te podemos adelantar que la prueba semestral a realizarse a mediados o fines de junio incluirá el práctico 7 y que el escrito a realizarse a fines de agosto tendrá que ver con los prácticos 8 al 11 (inclusive).

Hemos incluido ejercicios “complementarios” para que dispongas de suficiente material para practicar antes de las pruebas (o en cualquier momento) y también otros denominados “opcionales”. El nivel de dificultad de estos últimos es superior al que exigiremos en las evaluaciones y en el examen.

Durante el desarrollo de las clases teóricas daremos muchos ejemplos y discutiremos ejercicios y problemas presentando finalmente una solución de los mismos escrita en el pizarrón. A partir de esta base, podrás trabajar en tu casa en el repartido correspondiente, trayendo tus dudas a la siguiente clase de práctico. Es de esa manera que nos organizaremos.

Ya lo has habrás experimentado, pero vale la pena insistir en las bondades del trabajo en equipo. Te sugerimos que formes un grupo de estudio con algunos compañeros para (entre otras cosas) pensar juntos, intercambiar ideas y resolver los ejercicios fuera del horario liceal.

Tus cuadernos de teórico y práctico y este librito deben acompañarte tanto en las clases, como en los momentos que dedicarás al estudio de esta materia.

En este curso resultará extremadamente útil el programa de computación llamado DERIVE que está instalado en la sala de informática del Instituto.

1.1. Práctico 0

1. Estudia el signo de las siguientes funciones:

$$f_1 : f_1(x) = 3x - 6 \quad f_2 : f_2(x) = -x - 6 \quad f_3 : f_3(x) = 4x^2 - x \quad f_4 : f_4(x) = -2x^2 + 9$$

$$f_5 : f_5(x) = 3x^2 - x - 2 \quad f_6 : f_6(x) = x^2 + x + 10 \quad f_7 : f_7(x) = 4x^2 - 4x + 1$$

$$f_8 : f_8(x) = 9x^4 + 8x^2 - 1 \quad f_9 : f_9(x) = 6x^4 - 5x^3 + 5x - 6 \quad f_{10} : f_{10}(x) = (x - 3)^5(8 - x)^4$$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a) 4x + 8 \geq 0 \quad b) -3x - 1 < 0 \quad c) (-3x^2 + 2x)(3x - 2) \geq 0 \quad d) 4x + 2 \leq 5x + 1$$

$$e) 2x^2 + 7x + 15 < 0 \quad f) 2x^2 + 7x + 15 < 0 \quad g) x^4 - 25x^2 + 144 \leq 0$$

$$h) (2 - x)(x^2 + 4)(x^2 - 5) < 0 \quad i) \frac{(x + 5)(x^2 - 4)}{(2x - 1)(2 - x)} \leq 0 \quad j) \frac{x - 2}{x + 3} \leq \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$k) 1 - \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + x^2} \geq 0 \quad l) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{x} - \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

$$m) 1 - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \geq 0 \quad n) \frac{(x - 2)(x^2 - 4x + 3)}{(x + 4)} \leq x^2 - 5x + 6$$

3. Resuelve discutiendo según los valores del parámetro m :

$$a) (m + 2)x = 3m \quad b) (m + 2)x = m + 2 \quad c) (m^2 - 9)x = m - 3 \quad d) (m - 2)x \leq 3m$$

$$e) (m - 1)x \leq 2m - 2 \quad f) (x + 3)(x + m) \geq 0 \quad g) m(x - m)(2 - x) \geq 0$$

4. ¿Cuáles son los elementos del siguiente conjunto?

$$\{ \lambda \in \mathbb{R} / x^2 - \lambda x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \}$$

1.2. Práctico 1

1. Demuestra, por inducción sobre n , que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. (Desigualdad de Bernoulli).

2. Halla supremo, ínfimo, máximo y mínimo de cada uno de los siguientes subconjuntos de reales:

$$a) [2, 4) \cup (5, \sqrt{30}) \quad b) A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad c) A \cup \{2\}$$

$$d) \left\{ x/(x + 2)(x - 1)(x - \sqrt{3}) < 0 \right\} \quad e) \left\{ x/x \leq \sqrt{5} \right\} \cap \mathbb{Q} \quad f) \left\{ x/(x - 1)(x - m) \leq 0 \right\}$$

$$g) \left\{ m/x^2 - mx + 1 > 0, \forall x \right\} \quad h) \left\{ \frac{1}{2^n} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

3. Sea $L = \sup(A)$. Clasifica en verdaderas o falsas (justificando la respuesta):
- Si $x \in A$ entonces $x \leq L$.
 - Si $x \leq c$, $\forall x \in A$ entonces $L \leq c$.
 - Si $H < L$ entonces $\exists a \in A / H \leq a$.
 - $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A / L - \epsilon < a \leq L$.
 - $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A / L - \epsilon < a < L$.
 - $\forall \epsilon > 0, (L - \epsilon, L) \subset A$.
4. (a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Consideremos el conjunto B definido por $B = \{ -a / a \in A \}$. Demuestra que si h es cota inferior de A entonces $-h$ es cota superior de B .
- (b) Demuestra que todo subconjunto de \mathbb{R} , no vacío, y acotado inferiormente tiene ínfimo.

1.3. Práctico 2

1. Resuelve las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

$$\begin{array}{llll}
 a) |5x - 3| = |4x - 1| & b) 4|x + 1| = 3|x + 2| & c) |x - 4| > 1 & d) |x - 4| < 3 \\
 e) 3x - 1 < |3 - 2x| & f) 2|x - 4| \geq |3x + 2| & g) |x^5 - 3x^4| + 5 < 2 \\
 h) (x - 1)|2x + 1| > 3x & i) |x - 1| + |x - 2| \geq 1 & j) |2x - 3| - 3|x| < 1 \\
 k) \left| \frac{2x + 3}{x - 2} \right| > 5 & l) \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| \leq 1 & m) \left| \frac{x - 1}{x + 4} \right| > 4 & n) \left| \frac{x - 1}{x + 4} \right| > 4
 \end{array}$$

2. Resuelve:

$$\begin{array}{llll}
 a) |x - 2|^2 - 2 \geq 0 & b) \left| \frac{x - 1}{x + 4} \right| > 4 & c) |x + 1|^2 - 3|x + 1| < 0 & d) |x|^2 - 4|x| + 3 \geq 0 \\
 e) \frac{x^2 + |5x| + 6}{x^2 - 1} \geq 0 & f) \frac{|x - 1| - 1}{x^2 - 2x} \geq 0 & g) \frac{|x + 3| - 1}{|x - 2| - 1} \leq 0 \\
 h) \frac{2x - |x + 3|}{5 + |x^2 - 4|} \leq 0 & i) \frac{(x - 3)^2}{2x - |3x^2 - 7x + 4|} \geq 0 & j) \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right| \leq 1
 \end{array}$$

3. Demuestra que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
4. Una propiedad importante del valor absoluto afirma que: $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Admitiendo esta propiedad se te pide que demuestres que: $|x - y| \geq ||x| - |y||$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

1.4. Práctico 3

- Encuentra el interior, el exterior, la frontera y los puntos de acumulación de los conjuntos mencionados en el ejercicio 2 del Práctico 1. Investiga si son abiertos o cerrados.
- Demuestra los siguientes límites a partir de la definición:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{n} = 2 & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n+4} = 2/3 & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+4) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{2n^2-4} = 1 & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0 & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha > 0) \end{aligned}$$

- Demuestra que si $(x_n) \rightarrow a$ entonces $(|x_n|) \rightarrow |a|$ y que el recíproco es falso salvo que $a = 0$.
- Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n+8}{n^2+100} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-25}{-3n^2+n} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4+7n^2-3n}{n^5+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}+n^2+4n^{1/3}}{1-n^{3/2}+n^{7/4}} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2)^2-(3n+1)^2}{4n-3} & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n} - \frac{n^2+1}{n-1} \right) \end{aligned}$$

- Calcula:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-1}) & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2+4n+1}) & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

- Calcula:

$$\begin{aligned} \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{2+a_n}{2-a_n} & \quad \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{a_n+a_n^2}{a_n-a_n^2} & \quad \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{a_n^3+4a_n^2}{a_n^4-2a_n^2} \\ \lim_{a_n \rightarrow 2} \frac{a_n^2-4}{a_n-2} & \quad \lim_{a_n \rightarrow 1} \frac{a_n^2-3a_n+2}{a_n-1} & \quad \lim_{a_n \rightarrow \sqrt{3}} \frac{a_n^2-3}{a_n^2-\sqrt{3}a_n} \\ \lim_{a_n \rightarrow 1} \frac{a_n^2+3a_n-4}{a_n^3-1} & \quad \lim_{a_n \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+a_n}}{1-\sqrt{5-a_n}} & \quad \lim_{a_n \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{a_n-3}}{a_n^2-49} \end{aligned}$$

Opcionales

- Demuestra que a es punto de acumulación de un conjunto S si y solo si existe una sucesión (x_n) de puntos de S distintos dos a dos tal que $(x_n) \rightarrow a$.

1.5. Práctico 4

1. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ definida por la relación de recurrencia:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \geq 0$$

Demuestra que la sucesión es monótona creciente y que está acotada superiormente. Demuestra que converge y calcula su límite.

2. En cada uno de los siguientes casos estudia monotonía de (x_n) , prueba que converge y calcula su límite:

(a) $x_0 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, \quad \forall n \geq 0$

(b) $x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, \quad \forall n \geq 0.$

(c) $x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, \quad \forall n \geq 0.$

(d) $x_0 = 5, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n}, \quad \forall n \geq 0.$

3. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ definida por la relación de recurrencia:

$$x_0 = a > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1}, \quad \forall n \geq 0$$

- a) Estudia monotonía.
 - b) Muestra que la hipótesis de convergencia de (x_n) conduce a una contradicción. Deduce su comportamiento.
 - c) Calcula $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$.
 - d) Para $a = 0$ halla una fórmula explícita para x_n .
4. Dado un número $\lambda > 0$ consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\lambda}{x_n} \right), \quad \forall n \geq 0, \quad x_0 > \sqrt{\lambda}$$

- (a) Prueba que (x_n) es decreciente y que está acotada inferiormente por $\sqrt{\lambda}$. Deduce que converge y prueba que su límite es $\sqrt{\lambda}$.
- (b) Sea $\epsilon_n = x_n - \sqrt{\lambda}$. Muestra que:

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n^2}{2x_n} \quad y \quad \epsilon_{n+1} < 2\sqrt{\lambda} \left(\frac{\epsilon_1}{2\sqrt{\lambda}} \right)^{2^n}, \quad \forall n \geq 0$$

- (c) Usando lo anterior y admitiendo que $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{10}$, calcula $\sqrt{3}$ con un error menor que 10^{-7} .

Opcionales

5. **La sucesión de Fibonacci y la “razón áurea”.**

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci definida por: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0$. En este ejercicio se te pide estudiar la sucesión de cocientes de “cada término sobre el anterior”, concretamente, la sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por: $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

- (a) Muestra que $c_{n+1} = 1 + \frac{1}{c_n}, \forall n \geq 0$.

- (b) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} / x_n = c_{2n}$. Muestra que (x_n) es monótona creciente, que está acotada superiormente y calcula su límite.
- (c) Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} / y_n = c_{2n+1}$. Muestra que (y_n) es monótona decreciente, que está acotada inferiormente y calcula su límite.
- (d) Deduce que $\lim(c_n) = (1 + \sqrt{5})/2$.

6. Consideremos la sucesión (A_n) definida por:

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

- (a) Demuestra que es monótona creciente.
- (b) Demuestra que para cada $n \geq 1$ se cumple que $A_{2n} - A_n \geq \frac{1}{2}$
- (c) Demuestra que $\lim(A_n) = +\infty$.
7. Se dice que $((a_n), (b_n))$ es un Par de Sucesiones Monótonas Convergentes si se cumple que:
- i) $a_n \leq b_n, \forall n \geq 1$. ii) (a_n) es creciente y (b_n) es decreciente. iii) $\lim(b_n - a_n) = 0$.
- (a) Prueba que si $((a_n), (b_n))$ es un P.S.M.C. entonces existe un único número real L con $a_n \leq L \leq b_n, \forall n \geq 1$, tal que $(a_n) \rightarrow L^-$ y $(b_n) \rightarrow L^+$.
- (b) En cada uno de los siguientes casos, investiga si $((a_n), (b_n))$ es un P.S.M.C.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = 2 - \frac{1}{n^2} \\ b_n = 2 + \frac{1}{n^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{2n-1}{n+2} \\ b_n = \frac{6n+8}{3n-1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{n-1}{n+1} \\ b_n = \frac{n+1}{n-1} \end{array} \right.$$

8. Dados dos números positivos a y b con $a < b$ consideremos las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \forall n \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = b \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \forall n \geq 0 \end{array} \right.$$

Prueba que $((a_n), (b_n))$ es un Par de Sucesiones Monótonas Convergentes.

9. Consideremos las sucesiones dadas por:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} / a_n = \operatorname{sen}(n\alpha) \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}} / b_n = \operatorname{cos}(n\alpha) \quad (\alpha \neq k\pi)$$

- (a) Expresa a_{n+1} y b_{n+1} en función de a_n y b_n usando las conocidas fórmulas de seno y coseno de una suma. Demuestra que existe $\lim(a_n)$ si y sólo si existe $\lim(b_n)$.
- (b) Demuestra que ni (a_n) ni (b_n) tienen límite.

1.6. Práctico 5

1. Halla α y el límite para que éste sea finito y distinto de 0:

$$\lim_{a_n \rightarrow 3} \frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{a_n^2 + 2a_n + \alpha}$$

2. Halla a y b para que

$$\lim_{a_n \rightarrow 4} \frac{a_n^2 + aa_n + b}{a_n^2 - 4a_n} = 0.$$

3. Calcula los siguientes límites, en donde $x_n \rightarrow 0$, ($x_n \neq 0$):

$$\lim \frac{(e^{x_n} - 1)L(1 + 3x_n)}{x_n^2 + x_n^3} \quad \lim \frac{(e^{x_n^2} - 1)(5 + x_n)}{L(1 + 2x_n^2)} \quad \lim \frac{\sqrt[3]{x_n^3 + x_n + 1} - \sqrt[3]{3x_n^3 + 1}}{L(1 + x_n^2)}$$

4. Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} & \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{e^{x_n} - e^a}{x_n - a} & \lim_{x_n \rightarrow a} \frac{Lx_n - La}{x_n - a} & \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{1}{x_n} L \left(\sqrt{\frac{1 + x_n}{1 - x_n}} \right) \\ & \lim_{x_n \rightarrow 9} \frac{e^{\sqrt{x_n}} - e^3}{x_n - 9} & \lim_{x_n \rightarrow 1} \frac{L3 - L(2 + x_n)}{x_n - 1} & \lim_{x_n \rightarrow 2} \frac{e^{x_n^2} - e^4}{x_n^2 - 7x_n + 10} \\ & \lim n L \left(\frac{n + 1}{n - 1} \right) & \lim n (L(n + 1) - Ln) & \lim \frac{e^{\frac{n+3}{n-1}} - e}{L(n + 1) - Ln} \\ & \lim \frac{L(n^5 + n^3)}{L(n^4 + n^2 + 1)} & \lim \left((n^3 + 4)^{\frac{1}{3}} - (n^3 + 2n)^{\frac{1}{3}} \right) & \lim \left((16n^4 + 8n^3 - 10)^{\frac{1}{4}} - 2n \right) \end{aligned}$$

5. Calcula:

$$\begin{aligned} & \lim \left(\frac{3n + 5}{3n - 4} \right)^{\frac{n}{4}} & \lim_{x_n \rightarrow 1} \left(\frac{3x_n^2 - 1}{x_n + 1} \right)^{\frac{2x_n + 3}{x_n - 1}} & \lim_{x_n \rightarrow 1} (x_n)^{\frac{1}{x_n - 1}} \\ & \lim \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n & \lim_{x_n \rightarrow e} (L(x_n))^{\frac{1}{L(x_n) - 1}} \end{aligned}$$

6. Si $x_n \rightarrow 0$ calcula:

$$\begin{aligned} & \lim \frac{\operatorname{sen}(2x_n)}{4x_n} & \lim \frac{\operatorname{tg}(3x_n)}{\operatorname{sen}(5x_n)} & \lim \frac{L(1 + 3x_n^2)}{(e^{x_n} - 1)(1 - \cos x_n)} \\ & \lim \frac{1 - \cos(1 - \cos x_n)}{3x_n^4} & \lim \frac{e^{5x_n^2} - e^{1 - \cos(x_n)}}{x_n^2} & \lim \left(\frac{2 + \operatorname{sen}(x_n)}{1 + \cos(x_n)} \right)^{x_n} \\ & \lim \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(x_n)} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}(x_n)}}{x_n} & \lim \left(\frac{1 + \cos(2x_n)}{2} \right)^{\frac{1}{4x_n^2}} & \lim \frac{L(1 + \operatorname{sen} \frac{1}{n})}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

7. Halla α de modo que $\lim (n + 1 - \sqrt{n^2 + \alpha n}) = 4$.
8. Halla a y b para que $\lim \sqrt{n} (\sqrt{an^3 + bn^2 + 1} - \sqrt{n^3 - n})$ sea finito. Calcula dicho límite.
9. Calcula:

$$\lim \frac{3n^4 + 4}{e^n - 1} \quad \lim \frac{L(1+n)^2}{n^3 - 8} \quad \lim \frac{e^n + n^{2n} - n^{32}}{Ln + 3n^n + 5^{3n}} \quad \lim \frac{n Ln}{n + Ln}$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x_n}}{x_n} \quad \lim_{x_n \rightarrow 0^+} x_n Lx_n \quad \lim_{x_n \rightarrow 0^+} x_n^{x_n} \quad \lim_{x_n \rightarrow 0^+} x_n^{sen x_n}$$

$$\lim_{x_n \rightarrow 1^+} (x_n - 1)e^{\frac{1}{x_n - 1}} \quad \lim_{x_n \rightarrow 2^-} (x_n^2 - 4)e^{\frac{x_n - 1}{2 - x_n}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}}$$

10. Demuestra que las siguientes sucesiones no tienen límite (te sugerimos que encuentres al menos dos subsucesiones con límites diferentes):

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad a_n = (-1)^n n \quad a_n = 3^{\cos(n\pi)}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \quad a_n = n^2 (1 + (-1)^n) \quad a_n = n^{(-1)^n}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Opcionales

11. a) Encuentra un ejemplo de una sucesión que aglomere en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p$.
 b) Idem que aglomere en todos los puntos de la sucesión $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.
 c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean exactamente los puntos del conjunto $\{1/n / n \in \mathbb{N}^*\}$?

1.7. Práctico 6

1. En cada uno de los siguientes casos, grafica la función f :

$$f(x) = |x-2| \quad f(x) = |2x+1| \quad f(x) = |-3x+6| \quad f(x) = 7-|x-3| \quad f(x) = |x-1|-4$$

$$f(x) = |-x^2 + 2x| \quad f(x) = |x^2 - 1| \quad f(x) = 2 - |x^2 - 1| \quad f(x) = 4 - |x^2 - 4x|$$

$$f(x) = e^x - 2 \quad f(x) = e^{x-2} \quad f(x) = e^{x+1} \quad f(x) = e^{-(x-1)}$$

$$f(x) = L(x) + 4 \quad f(x) = L(x - 3) \quad f(x) = L|x + 3| \quad f(x) = |L(x) - 1|$$

2. Grafica las siguientes funciones en $x \geq 0$:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = x^{1/3} \quad h(x) = x^{3/2} \quad i(x) = x^4$$

Aprovechando lo anterior estudia el signo de $F(x) = \sqrt{x} - x^{3/2}$ y de $G(x) = x^4 - x^{1/3}$

3. En cada uno de los siguientes casos halla el dominio y una fórmula para $g \circ f$ y para $f \circ g$

- (a) $f(x) = x^4$ $g(x) = \cos x$
 (b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = x^2 + x + 1$
 (c) $f(x) = L(x)$ $g(x) = x^2 - 5x + 6$
 (a) $f(x) = Lx$ $g(x) = -\sqrt{x}$

4. (a) ¿Existe alguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea par e impar a la vez?

(b) Si f es impar y $0 \in D(f)$ prueba que $f(0) = 0$.

(c) Discute la paridad de $g \cdot f$ y de $g \circ f$ según la paridad de g y de f .

5. En cada uno de los siguientes casos investiga si la función f es par o impar.

$$f(x) = 2x^3 - 4x \quad f(x) = x^2 + \cos(x) \quad f(x) = |x^3 - \operatorname{sen}(x)| \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2}$$

6. Prueba que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ no existe.

7. Demuestra los siguientes límites a partir de la definición:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 4) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{|x-1|} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) = 0$$

Complementarios

8. En cada uno de los siguientes casos investiga si la función f es par o impar.

$$f(x) = x^5 - 4x + x^2 \quad f(x) = |x| - 2L|x| \quad f(x) = \operatorname{tg}(x) \quad f(x) = L \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

9. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{4x+8} - 1}{-x^2 + 4} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{e^{\sqrt{x}} - e^3}{x - 3} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2} - e^4}{x^2 - 7x + 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Lx - La}{x - a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{L3 - L(2+x)}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x (L(x+1) - Lx)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (L(x^2 + ax + 1) - L(x^2 - ax + 1))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x+3}{x-1}} - e}{L(x+1) - Lx} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 4} - \sqrt[3]{x^3 + 2x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{16x^4 + 8x^3 - 10} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 5x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{L(1+3x^2)}{(e^x - 1)(1 - \cos x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + 4Lx}{e^x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(1+x)^2}{x^3 - 8} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^{2x} - x^{32}}{Lx + 3x^x + 5^{3x}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x Lx}{x + Lx}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^{1/x}}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} \quad \lim_{x \rightarrow 2^\pm} (x^2 - 4)e^{\frac{1}{2-x}}$$

10. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} \left(\frac{1}{x-a} + L \left| \frac{x+b}{x-a} \right| \right) \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} \left(\frac{1}{x-a} + L \left| \frac{x-a}{x+b} \right| \right) \quad (a+b \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{a/x} - x \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{ax-1}{x+2}} - x e^a \right) \quad a \neq 0$$

Opcionales

11. Investiga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta:

- (a) Si existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y $f\left(\frac{2n+1}{n+3}\right) = \frac{3n-4}{2n+5}$ entonces $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{3}{2}$
- (b) Si $f\left(\frac{2n-3}{n+1}\right) \rightarrow 3$ y $f\left(\frac{4n-1}{2n+3}\right) \rightarrow 3$ entonces $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$
- (c) Se sabe que existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \alpha$ y que $f(0) = \beta \neq \alpha$. Si $x_n = \frac{(1+(-1)^n)n}{n^2+1}$ entonces $f(x_n) \rightarrow \alpha$.
- (d) Se sabe que $f\left(\frac{(1+(-1)^n)n}{2n^3+5}\right) = (-1)^n$ entonces no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1.8. Práctico 7

1. En cada uno de los siguientes casos, grafica la función f y estudia su continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{si } x \leq 0. \\ 1, & \text{si } 0 < x < 2. \\ -2x+5, & \text{si } x \geq 2. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq -1. \\ x+3, & \text{si } -1 < x \leq 4. \\ -2x+12, & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x < -3. \\ x^2-4, & \text{si } -3 \leq x \leq 1. \\ x-4, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad r(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x \geq 0. \\ |x+1|-2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones discutiendo según λ

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0. \\ x+\lambda, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & \text{si } x \leq 2. \\ x^2-x+\lambda, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0. \\ \lambda, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & \text{si } x \neq 1. \\ \lambda, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

3. Clasifica las discontinuidades de:

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{|x+6|}\right)}{x-2} \quad g(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Sea f una función definida en cierto E_0 tal que $|f(x)| \leq |\text{sen } x|$, $\forall x \in E_0$. Demuestra que f es continua en 0.

5. En lo que sigue se supone que todas las funciones que se mencionan están definidas (por lo menos) en algún entorno del punto a .
- Si f es continua en a y g es discontinua en a , ¿qué puede decirse sobre la continuidad de $f + g$ en a ?
 - ¿Y si ambas funciones son discontinuas en a ?
 - Responde las mismas preguntas para el caso de la función producto, es decir: $f \cdot g$
6. Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua en I y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia mediante: $x_0 \in I$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 0$. Demuestra que si existe $\lim(x_n) = L \in \mathbb{R}$ entonces L debe ser un punto fijo de f , es decir, $f(L) = L$.

7. **Un teorema sobre puntos fijos.**

Sea f una función continua en $[0, 1]$ tal que $f(x) \in [0, 1]$, $\forall x \in [0, 1]$. En estas condiciones te pedimos que demuestres que f tiene algún punto fijo en el intervalo $[0, 1]$, es decir: existe al menos un punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. Para ello te sugerimos que intentes aplicar el teorema de Bolzano a la función $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x) = x - f(x)$.

8. Sea f una función continua en a .
- Demuestra que si $f(a) \neq 0$ entonces existe algún E_a en el cual la función tiene el mismo signo de $f(a)$. (Teorema de Conservación del Signo para funciones continuas).
 - Supongamos que:

$$\forall E_a \quad \exists x, y \in E_a \quad / \quad f(x) < 0 \quad \text{y} \quad f(y) > 0$$

¿Qué se puede decir de $f(a)$?

Complementarios

9. Estudia el dominio y la continuidad de f y grafica su comportamiento en algún entorno de los puntos de discontinuidad:

$$a) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x + 1} \qquad b) \quad f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1} \qquad c) \quad f(x) = \frac{x + 1}{e^x}$$

$$d) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} \qquad e) \quad f(x) = \frac{L|x|}{x}$$

10. Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones discutiendo según λ :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{si } x \geq 0. \\ |x + 3| + \lambda & \text{si } x < 0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } x \leq \frac{1}{2}. \\ (2x-1)e^{\frac{-1}{2x-1}} + \lambda & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Opcionales

11. (a) Una propiedad importante del valor absoluto afirma que: $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Admitiendo esta propiedad se te pide que demuestres que: $|x - y| \geq ||x| - |y||$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) Demuestra que si f es una función continua en un punto x_0 entonces $|f|$ también lo es. (Te sugerimos que apliques la definición de continuidad y la desigualdad anterior). ¿Es válido el recíproco de este resultado? (Si es válido debes demostrarlo y si consideras que es falso debes encontrar un contraejemplo).

12. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real. Se define $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ así:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq g(x). \\ g(x), & \text{si } f(x) < g(x). \end{cases}$$

en otras palabras, $h(x)$ coincide con: $h(x) = \text{máx} \{f(x), g(x)\}$.

- (a) Demuestra que si f y g son continuas en x_0 , entonces h también lo es. (Se te sugiere comprobar y usar que $\text{máx}(u, v) = \frac{|u-v|+u+v}{2}$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$).
- (b) ¿Es válido el recíproco del resultado anterior?
13. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \quad D(p, q) = 1. \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

14. (a) Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Demuestra que si $f(r) = g(r)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$ entonces $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Demuestra que:
- $f(n) = f(1) \cdot n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 - $f(0) = 0$ y $f(-1) = -f(1)$.
 - $f(m) = f(1) \cdot m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.
 - $f(r) = f(1) \cdot r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$.
 - $f(x) = f(1) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
15. (a) Sea $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$. Determina la función g .
- (b) Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua tal que $h(x+y) = h(x) \cdot h(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Determina la función h .

1.9. Práctico 8

- Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$, encuentra la ecuación de la tangente y la normal a la $G(f)$ en el punto de abscisa 2.
- Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Encuentra los puntos del $G(f)$ en donde la tangente es horizontal.
- Sea $f(x) = L|2x + 1|$. Encuentra los puntos en los que la tangente al $G(f)$ es paralela a la recta $2x - 3y + 20 = 0$.
- Encuentra los valores de a y b para que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -x^2 + ax + b$ tengan tangente común en el punto de abscisa 0.
- Muestra que $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ verifica la relación $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, independientemente del valor de las constantes A , b y ω .
- Una pelota se deja caer desde el techo de un edificio de 80 metros. La altura de la pelota se describe en función del tiempo (segundos) mediante la función $h(t) = -5t^2 + 80$ (metros). ¿Cuál es su velocidad al llegar al piso?

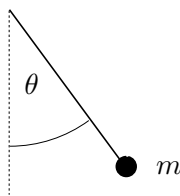
7. La distancia recorrida por un auto (en cierto viaje continuo) viene dada por $d(t) = -t^3/3 + 2t^2$ en donde d se mide en cientos de km y t en horas con $0 \leq t \leq 4$. Encuentra la velocidad y aceleración instantáneas y gráficas. ¿Cómo se movió el auto?.
8. Encuentra la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x^4 - 7x^5 + 3x - 8 \quad x(1-x) \quad (4x^2 - 2x)^4 \quad (\text{sen } 3x)^5 \quad \frac{x^2}{(2x-1)^3}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x(2x-1)} \quad \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \sqrt{x^2 + 1} \quad x \sqrt{2x^2 + 3x} \quad \frac{x^2}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x^2 L(x) + 3x^5 \quad (x^2 - 4x)e^{2x} \quad L|x + \sqrt{1+x^2}| \quad \frac{1}{2} L \left| \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right| \quad \frac{\text{tg}(2x)}{\text{tg}(x)}$$

9. Consideremos el péndulo “clásico” de la figura. Una correcta aplicación de la “ley de Newton”



da lugar a la ecuación:

$$(E) \quad \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \text{sen}(\theta(t))$$

- (a) En cada instante t , la energía total (cinética más potencial) de este sistema está dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} m l \left[\dot{\theta}(t) \right]^2 + m g [1 - \cos(\theta(t))]]$$

Verifica que la energía total se conserva.

- (b) La solución $\theta(t) = 0$ se denomina “posición de equilibrio”. Para “pequeñas oscilaciones” alrededor de la posición de equilibrio, es decir, para θ “pequeño”, es posible aproximar $\text{sen}(\theta)$ por (justifica la respuesta). Encuentra una ecuación aproximada para (E).
- (c) En el instante inicial se suelta la masa con velocidad nula desde un ángulo $\theta(0) = \pi/30$. Muestra que la función $\theta(t) = \frac{\pi}{30} \cos(\omega t)$ (en donde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$) es solución aproximada de ese problema.

10. Estudia continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0. \\ ax + b, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leq 0. \\ -x^2 + x + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{si } x \geq 0. \\ |x + 3| + \lambda & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

11. **Crecimiento exponencial de una población (modelo “Malthusiano”).**

Según el modelo de Malthus de crecimiento de la población de la Tierra, el número de habitantes del planeta en un instante t (medido en años) es

$$p(t) = 3,06 \cdot 10^9 e^{0,02t}$$

El instante inicial ($t = 0$) corresponde al año 1961. Según este modelo, calcula el tamaño de la población en 1700, 1800, 1900, 1970, 1980, 1990, 2000 y 2004. Busca datos reales y compara con estos resultados. Este modelo, ¿se ajusta a la realidad?

12. Cierta población de bacterias tiene un crecimiento exponencial duplicándose su tamaño cada cuatro horas. Si la población inicial es de 100 bacterias, determina el tamaño de la población en cualquier instante t (medido en horas). ¿Cuándo llegará la población a un tamaño de 6000?

13. **Desintegración radiactiva.** Existen muchos modelos físicos que satisfacen una ley de crecimiento o de decrecimiento. Un ejemplo de éstos es la desintegración de elementos radiactivos. A partir de experiencias, los científicos han tomado la siguiente función para expresar la cantidad (masa) de un elemento radiactivo en un instante de tiempo t :

$$y(t) = A e^{kt} \quad A, k \text{ constantes}, \quad k < 0$$

Verifica que, según este modelo, la velocidad de desintegración es, en cada instante, directamente proporcional a la masa existente en dicho instante.

14. El **período de vida media** de un elemento radiactivo es el tiempo requerido para que una cantidad inicial se desintegre a la mitad. Por ejemplo, se ha calculado que el período de vida media para el ^{14}C (carbono catorce) es de 5730 años. Es decir, si se tienen 2 gramos de ^{14}C en la actualidad, dentro de 5730 años quedará aproximadamente 1 gramo. Este período de vida media y el hecho de que los seres humanos continuamente toman ^{14}C , permite que las observaciones con ^{14}C sean útiles para determinar la antigüedad de los objetos.

- Sabiendo que la vida media del ^{14}C es 5730 años, deduce que la constante de decrecimiento k vale $k = -(L2)/5730 \cong -1,20968 \cdot 10^{-4}$
- Supongamos que en el instante inicial $t = 0$ hay 50 gramos de ^{14}C . Determina la constante A y calcula la cantidad que quedaría después de transcurridos 100 años.
- Encuentra la **vida media** en el modelo general de decrecimiento exponencial $y(t) = A e^{kt}$.

Complementarios

15. Si g es derivable en todo \mathbb{R} y $f(x) = x^3$ calcula $(g \circ f)'(x)$.

16. Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = (x^2 + 1) e^{-2x}$
- $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 1}{x^3 + 1}$
- $f(x) = L \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$
- $f(x) = 5 - 3x + L \left| \frac{3x-1}{x+1} \right|$
- $f(x) = L \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$
- $f(x) = (x^2 + 2x) e^{\frac{2}{x+2}}$
- $f(x) = 2(x-1) + \sqrt{x^2 - 6x + 5}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x+1} + L |1 - x^2|$
- $f(x) = \frac{x-1}{x} e^{1/x}$

Respuestas:

- $f'(x) = -2(x^2 - x + 1) e^{-2x}$
- $f'(x) = \frac{4x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$
- $f'(x) = \frac{2}{x^2-1}$
- $f'(x) = \frac{-9x^2-6x+7}{(3x-1)(x+1)}$
- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f'(x) = 2 \frac{(x^2+2x+2)}{x+2} e^{\frac{2}{x+2}}$
- $f'(x) = \frac{x-3+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}}$
- $f'(x) = -\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^2(1-x)}$
- $f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{1/x}$

17. Estudia continuidad y derivabilidad de las funciones del ejercicio 1 del Práctico 7.
18. Un cultivo de bacterias *Streptococcus A* recién inoculadas (un grupo común de microorganismos que causa infección séptica en la garganta) contiene 100 células. Al chequear el cultivo 60 minutos después se observa que hay 450 células. Suponiendo que dicha población tiene un crecimiento exponencial, determinar el número de células presentes en cualquier tiempo t (medido en minutos). ¿Cuál es el tiempo requerido para que el número de células se duplique?
19. Un cultivo de bacterias crece exponencialmente con una tasa de crecimiento $k = 0,44 \text{ hora}^{-1}$. Encuentra el tiempo necesario para que el tamaño de la población se duplique.
20. La vida media de la morfina en el torrente sanguíneo es de tres horas. Si se supone que decrece exponencialmente y que inicialmente hay $0,4 \text{ mg}$ de morfina, determina la cantidad presente en cualquier instante t (medido en horas). ¿Cuándo la cantidad de morfina estará por debajo de $0,01 \text{ mg}$?
21. Cierta población de bacterias tiene un crecimiento exponencial triplicándose su tamaño cada cinco horas. Si la población inicial es 200, determina el tamaño de la población en cualquier instante t (medido en horas). ¿Cuándo llegará la población a un tamaño de 20000?
22. Una población de *E - coli* se duplica cada 20 minutos. Un tratamiento para dicha infección elimina el 90% de la *E - coli*. El tamaño inicial es de 10^8 , crece exponencialmente durante T minutos y al aplicar el tratamiento la población retorna a su tamaño inicial 10^8 . Halla el tiempo T .
23. El elemento radiactivo *yodo - 131* se desintegra exponencialmente con una constante de desintegración $k = -1,3863 \text{ dia}^{-1}$. Encuentra su vida media.
24. La vida media del *uranio - 235* es aproximadamente $0,7 \cdot 10^9$ años. Si se entierran 50 gr en un basurero de desechos nucleares, ¿cuántos gramos quedarán después de 100 años?

Opcionales

25. Investiga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *Si una función es derivable en un punto a entonces es necesariamente continua en algún entorno de a .* (Debes demostrarla o encontrar un contraejemplo).

1.10. Práctico 9

1. (a) Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Supongamos además que existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M, \forall x \in (a, b)$.
Demuestra que $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|, \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.
(b) Demuestra que $|\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
2. Encuentra todas las primitivas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{cccc}
 e^x - x^3 + 4x^5 & \frac{1}{x} - \cos(x) + \sqrt{x} & 2x^3 - e^{4x} & \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} \\
 \frac{1}{x+b} & \frac{a}{ax+b} & \frac{3x^2}{x^3+8} & \frac{f'(x)}{f(x)+2005}
 \end{array}$$

3. Una bolita de masa m se dispara hacia arriba desde una altura inicial de 10 metros con una velocidad inicial de 40 m/s. Se supone que la única fuerza que actúa sobre ella es $-mg$ y que, por lo tanto, su movimiento transcurre en una recta vertical.
- Encuentra la ecuación del movimiento de la bolita.
 - ¿En qué instante y a qué altura se frena?
 - ¿Cuánto demora en llegar al suelo (altura 0)?
4. Cierta población tiene un valor inicial de $y(0) = 350$ individuos. Suponiendo que su evolución sigue el modelo de “crecimiento logístico” con una tasa de crecimiento $k = 0,007$ y con un tamaño máximo admisible de $M = 1000$ individuos, encuentra el tamaño de la población para todo instante $t \geq 0$. ¿Qué le sucede a la población cuando $t \rightarrow +\infty$?
5. Consideremos la ecuación diferencial: (E) $f'(x) = [f(x)]^2$.
- Verifica que las funciones de la forma $f(x) = \frac{-1}{x+c}$ son soluciones de (E) para cualquier valor de la constante c .
 - Demuestra que toda solución no nula de (E) es de la forma $f(x) = \frac{-1}{x+c}$ con c constante.
 - Encuentra la solución de (E) que cumple $f(0) = A$.
6. **Caída en un medio con resistencia proporcional a la velocidad.** Una partícula de masa m se deja caer con velocidad inicial nula desde una altura h . Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la resistencia del medio que supondremos proporcional a la velocidad de la partícula. (Este modelo resulta acorde para estudiar la caída de un paracaidista.) Si $v(t)$ es su velocidad (escalar) en cada instante entonces, una correcta aplicación de la “Ley de Newton” da lugar a:

$$m \dot{v}(t) = m g - b v(t)$$

en donde $b > 0$ es constante y está relacionada con el grado de resistencia del medio.

- Verifica que la única solución de este problema viene dada por:

$$v(t) = \frac{gm}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right)$$

- Calcula la **velocidad límite** de caída, esto es, el límite de $v(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.
 - Se ha verificado experimentalmente que ciertos paracaídas ofrecen una resistencia directamente proporcional a la velocidad con una constante de valor $b = \frac{980}{3} \left(\frac{kg}{seg} \right)$. Si una persona de 100 kilos (cualquier semejanza con tu profesor es pura coincidencia) se lanza con ese paracaídas desde una altura suficientemente grande, ¿a qué velocidad llega al piso? (velocidad límite). (Utiliza $g = 9,8 \text{ m/s}^2$).
 - Resulta razonable tomar en consideración el tiempo requerido para alcanzar la velocidad límite. Calcula la velocidad que adquirió la persona luego de tres segundos de tirarse. ¿Y luego de dos segundos? ¿Y luego de un segundo?
7. **Modelo de “enfriamiento” de Newton.**

Puede observarse que si se introduce un objeto caliente en ambientes fríos (o, de manera equivalente, un objeto frío en ambientes calientes), la razón a la que el objeto se enfría (calienta) no es proporcional a su temperatura, sino a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el ambiente. Si $T(t)$ es la temperatura del objeto en el instante t y T_a es la temperatura ambiente (que se supondrá constante), la ley de enfriamiento mencionada da lugar al siguiente modelo:

$$T'(t) = k (T(t) - T_a) \quad (*)$$

siendo k (constante) la razón de enfriamiento (calentamiento). En el caso de enfriamiento se supone $T(t) > T_a, \forall t \geq 0$ y $k < 0$.

- Demuestra las soluciones de la ecuación diferencial (*) son todas de la forma $T(t) = Ae^{kt} + T_a$ en donde A puede ser una constante positiva cualquiera.
 - ¿Qué interpretación física tiene la constante A ? (Expresa A en función de T_a y de la temperatura inicial del objeto: $T(0)$).
 - Calcula la temperatura límite del objeto cuando $t \rightarrow +\infty$. ¿Es razonable el resultado?
8. **Enfriamiento de una taza de café.** Una taza de café instantáneo recién servida tiene una temperatura de 82° . Después de dos minutos permaneciendo en una habitación a 21° , el café se enfría hasta 74° . Suponiendo que la temperatura $T(t)$ de la taza sigue la “ley de enfriamiento de Newton” (en donde t se mide en segundos), determina la función $T(t)$. ¿En qué tiempo llega el café a una temperatura tolerable de 49° ? (Respuesta: $t \approx 11$ minutos).

Opcionales

9. **Caída en un medio con resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad.** Una partícula de masa m se deja caer con velocidad inicial nula desde una altura h . Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la resistencia del medio que supondremos proporcional al cuadrado de la velocidad de la partícula. (El medio es más viscoso que en el ejercicio 5) Si $v(t)$ es su velocidad (escalar) en cada instante entonces, una correcta aplicación de la “Ley de Newton” da lugar a:

$$m \dot{v}(t) = m g - b [v(t)]^2$$

en donde $b > 0$ es constante y está relacionada con el grado de resistencia del medio.

- Verifica que la única solución de este problema viene dada por:

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{b}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{gb}{m}}t}}$$

- Calcula la **velocidad límite** de caída, esto es, el límite de $v(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

10. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Demuestra que f presenta un mínimo relativo en 0.
 - Prueba que $f'(0) = f''(0) = 0$.
 - ¿Es f creciente en algún intervalo de la forma $[0, \delta]$? ¿Es f decreciente en algún intervalo a la izquierda de 0?
11. **Propiedad de Darboux para la derivada y consecuencias.**
En todo este ejercicio, f es una función derivable en todos los puntos de un intervalo abierto I (no se supondrá que f' sea continua).
- Sean a y b dos puntos de I con $a < b$. Demuestra que si $f'(a) < \mu < f'(b)$ entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \mu$. (Sugerencia: prueba que la función $\varphi(x) = f(x) - \mu x$ tiene un mínimo en (a, b)). Este resultado está diciendo que la función derivada, aun no siendo continua, tiene la propiedad de Darboux.
 - Demuestra que si f' no tiene ceros entonces f es monótona.
 - Sea $x_0 \in I$. Demuestra que si existe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'(x_0)$.

- (d) f' NO puede tener discontinuidades de primera especie en I . O sea, si x_0 es un punto de discontinuidad de f' entonces no pueden existir al mismo tiempo sus límites laterales en x_0 . (Un ejemplo de una función derivable con derivada no continua lo hemos dado en el teórico. Observa que, en ese caso, la discontinuidad de f' es de “segunda especie”).
12. Sea f una función dos veces derivable con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f'(0) = f'(1) = 0$. Demuestra que existe algún punto $c \in [0, 1]$ tal que $|f''(c)| > 4$. (es decir, una partícula que recorre una distancia unidad en un tiempo unidad y que empieza y termina con velocidad 0, tiene en algún momento una aceleración mayor que 4).

1.11. Práctico 10

1. Consideremos la función F dada por:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq 0. \\ a - |x - 3| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Estudia continuidad y derivabilidad de F discutiendo según a y b .
- (b) Sean ahora $a = 3$ y $b = 1$. Grafica F . Halla, en caso de que existan, los extremos relativos y los extremos absolutos de F en $[-4, 0]$ y en $[-1, 7]$.
2. Encuentra el máximo y el mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en $[-1, 4]$ $f(x) = (x + 2)^3 (3 - x)$ en $[-1, 2]$
3. Demuestra, de dos maneras diferentes, que $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. (a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1$. Demuestra que $x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha)$, $\forall x \geq 0$.
 (b) Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$. ¿Es cierto que $e^x > x^a$, $\forall x \geq 0$?
5. Durante varias semanas se ha registrado el flujo de tráfico más allá de cierta salida del centro de Montevideo. Los datos señalan que entre la 1 : 00 y las 6 : 00 p.m., en un día normal de la semana, la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente $V(t) = t^3 - 10,5 t^2 + 30t + 20$ kilómetros por hora, donde t es el número de horas después del mediodía. ¿En qué momento entre la 1 : 00 y las 6 : 00 p.m. es más rápido el tráfico y en qué momento es más lento?
6. Entre todos los rectángulos de perímetro P dado, encuentra el de área máxima.
7. M es un punto variable sobre la parábola $y = x^2$ cuya abscisa cumple $-\sqrt{2} \leq x_M \leq \sqrt{2}$, y P es el punto $P(0, 2)$. Encuentra las posiciones de M para las cuales la distancia de P a M resulte máxima. Idem mínima.
8. En un rectángulo de cartón de lados 12 y 18 se recorta en cada vértice un cuadrado de lado x , obteniéndose el desarrollo de una caja sin tapa. ¿Cuál es la caja de volumen máximo que se puede construir?
9. Una fábrica de cerveza desea construir latas de forma cilíndrica (cilindro circular recto) que contengan un volumen V dado del producto. Demuestra que se minimizan los costos debidos al material usado en la construcción de las latas cuando la altura de las misma coincide coincide con el diámetro de su base.

10. Para $x \geq 0$ la función $U(x) = x^2 e^{-x}$ representa la “calidad (fidelidad) de sonido” producida por un equipo de amplificación ubicado en el teatro Sala Verdi, en función de la variable x que es la potencia a la que se ajusta dicho equipo. La potencia x se mide en cientos de Watts (reales). Teniendo en cuenta que Sala Verdi es una sala pequeña, que no se desea destrozarse los oídos de nadie, y que solo cuentas con ese aparato, ¿a qué potencia amplificarías un concierto de ROCK en esa sala? Eres totalmente libre en tu elección, pero, obviamente, debes explicar (justificar) tu respuesta.
11. Un fabricante puede vender cierto producto a 110 dólares la unidad. Los costos indirectos fijos son de 7500 dólares. Los costos de producción son de 60 dólares por unidad.
- ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para alcanzar el equilibrio? (ingreso=costo).
 - Halla la función de utilidad y gráficala.
 - ¿Cuál es la utilidad si se venden 100 unidades?
 - ¿Cuántas unidades debe vender para obtener una utilidad de 1250 dólares?
12. La función de demanda de determinado artículo es $40 - 2p$ en donde p es el precio por unidad. Halla la función de ingreso y gráficala. ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla dicho ingreso máximo.
13. Una empresa estima que cuando se emplean x cientos de personas, la utilidad será de:

$$U(x) = 8L(x) - x^2 \quad \text{dólares}$$

¿Qué nivel de empleo maximiza la utilidad? ¿Cuál es la utilidad a ese nivel?

14. La función de demanda de determinado artículo es $D(x) = 10^4(x^3 - 2x^2 - x + 2)$ ($0 \leq x \leq 1$), en donde x es el precio por unidad (medido en cientos de pesos uruguayos).
- Prueba que $D(x)$ es decreciente y no negativa en $[0, 1]$.
 - ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla dicho ingreso máximo.
15. Consideremos la función f dada por:

$$f(t) = 10^3 [(t - 1)^2 e^{-t} + 1]$$

- Encuentra (en caso que existan) los extremos absolutos de f en $[0, +\infty)$.
- Para $t \geq 0$, cierta población evoluciona según el modelo dado por $f(t)$. En otras palabras, $f(t)$ es el número de individuos presentes en cada instante t . (t se mide en horas). Describe el comportamiento de esta población. (En particular, encuentra los instantes en donde la población crece y decrece con mayor rapidez).

Complementarios

16. En un circuito en serie el voltaje de la fuente es V volts y la resistencia de R ohms. El “resistor” puede tener un valor x (también en ohms) variable. Se sabe que la potencia disipada en el resistor es $P(x) = \frac{V^2 x}{(R+x)^2}$. Encuentra el valor de x para el cual la dicha potencia sea máxima.
17. Consideremos la función F dada por:

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x & \text{si } x \leq 0. \\ |x - 2| - 2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- (i) Estudia continuidad y derivabilidad de F .
- (ii) Grafica F .
- (iii) Halla, en caso de que existan, los extremos relativos y los extremos absolutos de F en $[-3, 4]$.
18. Se quiere hallar el máximo y el mínimo absolutos de cierta función f en el intervalo $[1, 20]$. La información que se tiene es la siguiente:
- Los únicos puntos en que se anula $f'(x)$ son $x = 4$, $x = 10$ y $x = 17$.
 - $f''(4) > 0$, $f''(10) < 0$ y $f''(17) > 0$.
 - $f(4) = 5$, $f(10) = 15$, y $f(17) = 8$.
- ¿Alcanza con esta información para resolver el problema? Justifica la respuesta.
19. Supongamos que cuando se producen q unidades de cierto artículo, el costo total de fabricación es $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$ dólares. ¿En qué nivel de producción será mínimo el costo medio por unidad? (El costo medio por unidad es el cociente entre el costo total y el número de unidades producidas).
20. La función de demanda de determinado artículo es $300 - 3p$ en donde p es el precio por unidad. Halla la función de ingreso y grafícala. ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla dicho ingreso máximo.
21. Una empresa estima que cuando se producen x cientos de artículos, el costo será de:

$$U(x) = 18 + x^2 - 18L(x) \quad \text{miles de dólares}$$

- ¿Qué nivel de producción minimiza el costo? ¿Cuál es el costo a ese nivel?
Si se trabaja con una producción comprendida entre 100 y 500 artículos, ¿cuál es el costo máximo?
22. La función de demanda de determinado artículo es $D(x) = 10^6 x^2 e^{-x}$ ($x \geq 2$), en donde x es el precio por unidad (medido en cientos de pesos uruguayos).
- (a) Demuestra que el número de ventas decrece al aumentar el precio que se le asigna al artículo en cuestión.
- (b) Demuestra que el número de ventas tiende a 0 si el precio tiende a $+\infty$.
- (c) ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla dicho ingreso máximo.
23. Se desea construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. El tanque no tendrá tapa y deberá tener una capacidad de $4m^3$ de agua. El material con que se construirá tiene un costo de U\$ 10 el m^2 . ¿Qué dimensiones del tanque minimizan los costos debido al material?

1.12. Práctico 11

1. E.A. y R.G. de las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x \quad f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

$$f(x) = \frac{-x+4}{3x+2} \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad f(x) = \frac{x^2-4}{x^4} \quad f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f(x) = x e^x \quad f(x) = x e^{-x} \quad f(x) = x L(x) \quad f(x) = x \sqrt{x^2+1}$$

$$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \quad f(x) = \frac{L(x)}{x} \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad f(x) = \sqrt{9x^2-4x+1}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} \quad f(x) = x^4 e^{2-2x} \quad f(x) = x + L|2x+1| \quad f(x) = L \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

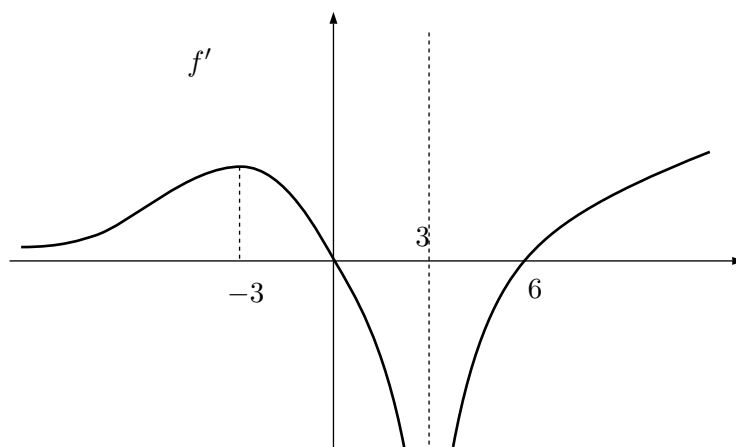
$$f(x) = L|e^x - 1| \quad f(x) = \sqrt{x^2+2x} \exp\left(\frac{1}{x}\right) \quad f(x) = (x+2) e^{\frac{1}{x}}$$

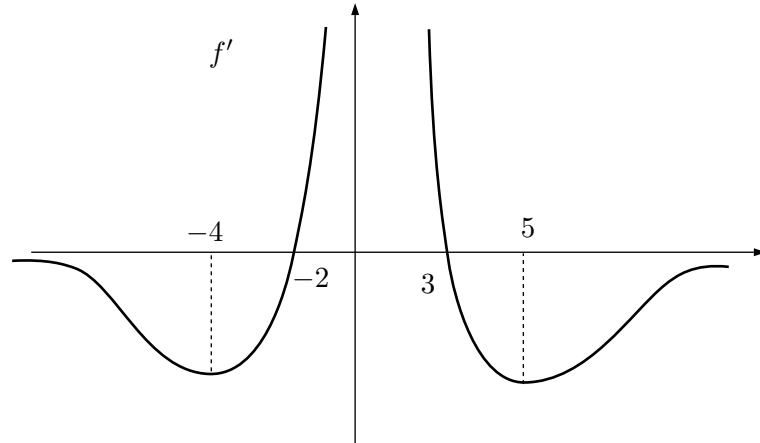
$$f(x) = |x|(x-2) \quad f(x) = \frac{|1-x^2|}{x} \quad f(x) = |x-2| e^{-x}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} \quad f(x) = \frac{1}{x(L|x|-1)}$$

$$f(x) = e^{\frac{-2}{x}} \frac{x^2-9}{x^2} (\sin f'') \quad f(x) = e^{\frac{2}{x+2}} |x^2+2x| \quad f(x) = 2(x-1) + \sqrt{x^2-6x+5}$$

2. Sea f una función tal que $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = \pm\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
 $f(0) = 2$, $f(6) = 4$, $f(-3) = 0$. Realiza un bosquejo de la gráfica de f sabiendo que la gráfica de su derivada es la que se indica en la figura.





3. Sea f una función tal que $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f(-2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(5) = 2$, $f(-4) = 6$. Realiza un bosquejo de la gráfica de f sabiendo que la gráfica de su derivada es la que se indica en la figura.
4. E. A. y R. G. de la función f dada por:

$$f(x) = \frac{2}{x+1} + L \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$$

5. E. A. y R. G. de la función f dada por:

$$f(x) = L \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - \frac{4}{x+2} + 2$$

6. Sea

$$f : f(x) = L \left| x + \frac{1}{2} \right| + \frac{\lambda}{x}$$

Halla λ sabiendo que en el punto de abscisa -1 la tangente a la gráfica es horizontal. E.A. y R.G. de f para el valor de λ hallado.

7. Sea

$$f : f(x) = \frac{|x-1|}{\lambda x^2 + x} e^{1/x}$$

Halla λ sabiendo que $y = 1$ es asíntota de f para $x \rightarrow +\infty$. E.A. y R.G. de f para el valor de λ hallado.

8. (a) (i) Sea f una función, $x_0 \in D(f)$, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0 . Demuestra que dicha tangente pasa por el origen si, y sólo si, se cumple $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.
- (ii) Halla los puntos de $G(f)$ en donde la tangente pasa por el origen para cada una de las siguientes funciones: (a) $f(x) = L(x)$, (b) $f(x) = e^x$, (c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$
- (b) (i) Estudia el signo de $g_\lambda(x) = \lambda x - L(x)$
- (ii) Estudia y grafica los distintos casos de la familia de funciones:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda x^2}{2} + x - x L(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

9. (a) Sea $h(x) = 2L|x-1| - x - 2$. Halla sus raíces con error menor que 0,1 y estudia su signo.
 (b) Sea $g(x) = 2x + 9 - 6L|x-1|$. Halla sus raíces con error menor que 0,1 y estudia su signo.
 (c) E. A. y R. G. de la función f dada por:

$$f(x) = \frac{x - L|x-1|}{(x-1)^2}$$

(d) Discute, según $\lambda \in \mathbb{R}$, el número de raíces de la ecuación $f(x) - \lambda = 0$.

10. (a) Consideremos las funciones h y g dadas por:

$$h(x) = e^{x/(x-1)} \quad g(x) = (x-1)^2$$

Halla los ceros (con error menor que 0,1) y estudia el signo de $g(x) - h(x)$ en $x > 1$.

- (b) E.A. y R.G. de la función f dada por:

$$f(x) = e^{x/(x-1)} + |x-1|$$

1.13. Práctico 12

1. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 + x - L|x+1|$.
 Halla $f([0, 2])$ justificando la respuesta. Prueba que $f : [0, 2] \rightarrow f([0, 2])$ es invertible. Calcula $(f^{-1})'(2 - L2)$.
2. Discute la concavidad de f^{-1} según el crecimiento y la concavidad de f . Hazlo geoméricamente y analíticamente.
3. Demuestra la siguiente identidad:

$$\operatorname{Arctg}(x) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \pi/2, & \text{si } x > 0. \\ -\pi/2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4. Consideremos las funciones:

$$f : f(x) = -2 \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \quad g : g(x) = \operatorname{Arcsen}(2x-1)$$

- (a) Halla los dominios de f y g .
 (b) Verifica que $f'(x) = g'(x)$. ¿Qué relación hay entre f y g ?
 (c) Grafica f y g .
5. E.A. y R.G. de las siguientes funciones:

$$f(x) = x \operatorname{Arctg}(x) - \frac{1}{2}L(x^2 + 1) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctg}(x) \quad f(x) = -\frac{x}{2} + \operatorname{Arctg}(x) - \operatorname{sgn}(x-1) \operatorname{Arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$f(x) = x - L|1+x| - \text{Arctg}(x) \quad f(x) = (x+1) \text{sgn}(x-1) + x \text{Arctg}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Opcionales

6. (a) Prueba que si g tiene derivada continua en a y $g'(a) \neq 0$ entonces g es inyectiva en algún entorno de a .
- (b) Consideremos la función f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0. \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Prueba que $f'(0) = 1/2$ y que, sin embargo, f no es inyectiva en ningún intervalo que contenga al 0. Comenta el resultado.

1.14. Práctico 13

1. Halla el desarrollo de Mc Laurin de orden n de las siguientes funciones:

$$\frac{1}{2-x} \quad \frac{1}{a-x} \quad \frac{1}{x^2-3x+2} \quad L(1-x) \quad L\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$e^x - \cos(x) \quad \text{sen}(x) \cos(x) \quad \text{sen}^2 x \quad \frac{1+x^2}{1-x^2} \quad L(1+\text{sen} x) \quad (\text{orden } 4)$$

2. Calcula los siguientes límites aplicando L'Hôpital y aplicando desarrollos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2 + \text{sen} x - 2x}{1 - \cos x - x^2/2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{L(1+x) - x - x^2/2}{\text{tg} x - \text{sen} x}$$

3. Halla el orden y la parte principal de los siguientes infinitésimos para $x \rightarrow 0$

$$\text{tg} x - \text{sen} x \quad e^x - \text{sen} x - 1 - x^2/2 - x^3/3 \quad L(1+x) - \text{sen} x \quad x^3 - \text{sen}^3 x$$

$$\text{sen} x - x \cos x \quad 1 + L(1+x) - \cos x + x - 2\text{sen} x - \frac{2x^3}{3} \quad \cos x - \frac{1-x}{1+x}$$

4. En cada uno de los siguientes casos determina los valores de los parámetros para obtener un infinitésimo del mayor orden posible para $x \rightarrow 0$. Halla la parte principal.

$$a(e^x - 1) - bx^2 - x \quad x + a\text{sen} x + b\text{tg} x \quad e^x \text{sen} x - (ax + bx^2 + cx^3)$$

$$L(1+x) - \frac{ax + bx^2}{1+cx} \quad a(e^x - x - 1) + b\text{sen} x + cL(1+x) - x \quad \cos x - \frac{1+2ax^2}{1+3bx^2}$$

5. Consideremos la función: $f(x) = e^x - x - 2 + \cos x - \frac{x^3}{6}$

- (a) Encuentra el polinomio de Mac Laurin de orden 4 de f .
- (b) Analiza si f presenta un máximo o un mínimo relativo en 0.

(c) Calcula, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$ el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

6. Estudia el comportamiento local alrededor de 0 de cada una de las funciones del ejercicio 3. Bosqueja la gráfica de cada una de ellas en algún entorno de 0.
7. Encuentra la expresión de Lagrange del resto de orden 8 correspondiente a la función $\operatorname{sen} x$. Usando el desarrollo de Mc Laurin de orden 8 calcula un valor aproximado de $\operatorname{sen} 1$ y demuestra que el error cometido es menor que $3,10^{-6} = 0,000003$.

Complementarios

8. **Funciones hiperbólicas.** Consideremos las funciones:

$$sh : sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ch : ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad th : th(x) = \frac{shx}{chx}$$

- (a) E.A. y R.G. de ellas. Verifica que $sh' = ch$, $ch' = sh$, $th' = \frac{1}{ch^2}$.
- (b) Prueba que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $sh(x+y) = sh(x) ch(y) + sh(y) ch(x)$; $ch(x+y) = ch(x) ch(y) + sh(x) sh(y)$.
- (c) Halla sus desarrollos de Mac Laurin.
- (d) Muestra que las ecuaciones paramétricas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ vienen dadas por: $x(t) = a ch(t)$; $y(t) = b sh(t)$.
- (e) Prueba que $sh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es invertible. Su inversa se llama *Argsh*. ¿Qué propiedades tiene?. Podemos asegurar entonces que para cada y , existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = sh(x)$, es decir:

$$x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Si logramos $x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ en función de y habremos obtenido una fórmula para *Argsh*. Multiplicando a miembro por e^x y operando obtenemos:

$$e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0$$

de lo cual resulta:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Ahora bien, como $e^x > 0$ sólo corresponde tomar el signo $+$. Se tiene entonces que

$$x = \operatorname{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

y, por lo tanto

$$\operatorname{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Para calcular su derivada no es necesario en este caso aplicar la fórmula de la derivada de la función inversa, ya que alcanza con derivar la expresión anterior. Comprueba que dicha derivada da:

$$(\operatorname{Argsh})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

1.15. Práctico 14

- Realiza un análisis completo de órbitas para cada uno de los siguientes casos:
 (a) $f(x) = 2x$ (b) $f(x) = \frac{1}{3x}$ (c) $f(x) = -x$ (d) $f(x) = -2x + 1$
 (e) $f(x) = x^3$ (f) $f(x) = \cos(x)$ (g) $f(x) = \sin(x)$ (h) $f(x) = x - x^2$
 (En la parte (c) notarás que 0 es el único punto fijo y que todas las demás órbitas son periódicas: todo punto diferente de 0 es periódico de período dos).
- En cada uno de los siguientes casos encuentra los puntos fijos de f y clasifícalos. Visualiza el resultado mediante el método gráfico.
 (a) $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{3}{4}$ (b) $f(x) = 2x^2 + \frac{x}{2}$ (c) $f(x) = 2x(1 - x)$.
- Sea f dada por $f(x) = (x^3 - 2)/3$. Encuentra los puntos fijos y clasifícalos. Realiza un análisis completo de órbitas.
- En los siguientes casos verifica que 0 es punto fijo de f y que $f'(0) = 1$. Realiza un análisis gráfico para intentar clasificar dichos puntos.
 (a) $f(x) = x^2 + x$ (b) $f(x) = \sin(x)$ (c) $f(x) = x - x^3$ (d) $f(x) = e^x - 1$.
- Sea p un punto fijo de la función f tal que $f'(p) = 1$. Demuestra que:
 (a) Si $f''(p) > 0$ o $f''(p) < 0$ entonces p no es atractor ni repulsor.
 (b) Si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) > 0$ entonces p es repulsor.
 (c) Si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) < 0$ entonces p es atractor.
 Sugerencia: utiliza el desarrollo de Taylor de f alrededor de p para estudiar el signo de $f(x) - x$. (Puedes suponer que f tiene todas las derivadas continuas que necesites para aplicar la fórmula de Taylor).
- En cada uno de los siguientes casos 0 pertenece a una órbita periódica de la función f . Clasifica dicha órbita.
 (a) $f(x) = 1 - x^2$ (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} \cos(x)$ (c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$.
- Consideremos la ecuación $x_{n+1} = -x_n^2 + 4x_n$.
 (a) Encuentra los puntos fijos y clasifícalos.
 (b) Encuentra los puntos periódicos de período dos y clasifícalos.
 (c) Mediante el “método gráfico” estudia la órbita cuya condición inicial es $x_0 = 2$. Idem con la que comienza en $x_0 = 4, 2$
- (a) Prueba que el polinomio $P(x) = x^6 - 2x^4 + x^2 - 1$ tiene una sola raíz en el intervalo $(1, 2)$. Sea α dicha raíz (no se pide calcularla).
 (b) Consideremos la ecuación $x_{n+1} = f(x_n)$ en donde $f(x) = \alpha(x^2 - 1)$. Demuestra que 0 es un punto periódico de período 3 y clasifícalo.
- (a) E. A. y R. G. de la función f dada por:

$$f(x) = x \exp\left(\frac{6-x}{x+2}\right)$$

- (b) Se considera el sistema dinámico discreto dado por $(*) x_{n+1} = f(x_n)$ siendo f la función de la parte anterior.

- (i) Halla los puntos fijos y clasifícalos.
- (ii) Una persona de peso inicial $x_0 > 50$ se somete a una dieta de modo que su peso (en decenas de kilos) evoluciona mes a mes según (*). ¿A cuánto tenderá el peso de una persona que comienza con 85 kilos? ¿Puede una persona de 55 kilos rebajar de peso?
10. Las células se reproducen por división. El proceso por el cual su núcleo se divide se denomina mitosis. Existe evidencia bioquímica de la existencia de compuestos, llamados chalone, que son inhibidores de la mitosis. Asumimos, por simplicidad, que las generaciones de células son distintas y llamemos x_n al número de células de generación n . Asumimos también que la cantidad de chalone producida es proporcional al número de células. La acción bioquímica del chalone consiste en juntarse a una proteína involucrada en la mitosis tornándola inactiva. Estudios acerca de la unión de moléculas a proteínas sugieren que una ecuación apropiada para este proceso sea:

$$x_{n+1} = \frac{2 x_n}{1 + \left(\frac{x_n}{\alpha}\right)^p}$$

donde α y p son parámetros.

(a) Prueba que los puntos fijos son $x = 0$ y $x = \alpha$. ¿Son atractores o repulsores? (Eventualmente, deberás discutir según p). Como verás, el caso $p = 4$ es más complicado. Pospone esa situación hasta los ejercicios opcionales.

(b) Aplica el “método gráfico” para el caso $\alpha = 5$ y $p = 3$.

Complementarios

11. En cada uno de los siguientes casos encuentra los puntos fijos de f y clasifícalos. Visualiza el resultado mediante el método gráfico.
- (a) $f(x) = -3x + 8$ (b) $f(x) = \frac{1}{2}x(1 - x)$ (c) $f(x) = x^3$
12. En los siguientes casos encuentra los puntos fijos de f . Verifica que, en cada uno de ellos, el valor absoluto de f' vale 1. Realiza un análisis gráfico para intentar clasificar dichos puntos.
- (e) $f(x) = -x + x^3$ (f) $f(x) = -x - x^3$ (g) $f(x) = e^{x-1}$ (h) $f(x) = \frac{1}{x}$
13. En cada uno de los siguientes casos 0 pertenece a una órbita periódica de la función f . Clasifica dicha órbita.
- (a) $f(x) = -\frac{4}{\pi} \text{Arctg}(x + 1)$ (b) $f(x) = |x - 2| - 1$
14. Con esta nueva técnica (puntos fijos estables, inestables, método gráfico), estudia el comportamiento de las sucesiones definidas por recurrencia del Práctico 4.
15. Consideremos la ecuación en diferencias lineal de primer orden dada por $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ en donde α y β son constantes no nulas. Encuentra los puntos fijos y realiza un análisis completo de órbitas discutiendo según α y β .

Opcionales

16. Sea f una función continua y estrictamente decreciente en $E_p = (p - \epsilon, p + \epsilon)$, con $f(E_p) \subset E_p$, siendo p punto fijo de f . (Observa que $f \circ f$ es continua y estrictamente creciente en E_p). Demuestra que
- (1) Si $(f \circ f)(x) - x > 0, \forall x \in E_p^*$ o $(f \circ f)(x) - x < 0, \forall x \in E_p^*$ entonces p no es atractor ni repulsor.
- (2) Si $(f \circ f)(x) - x > 0, \forall x \in (p, p + \epsilon)$ y $(f \circ f)(x) - x < 0, \forall x \in (p - \epsilon, p)$ entonces p es repulsor.
- (3) Si $(f \circ f)(x) - x < 0, \forall x \in (p, p + \epsilon)$ y $(f \circ f)(x) - x < 0, \forall x \in (p - \epsilon, p)$ entonces p es atractor.

17. Sea p un punto fijo de la función f tal que $f'(p) = -1$. Demuestra que:
- (a) Si $2f'''(p) + 3(f''(p))^2 > 0$ entonces p es atractor.
 (b) Si $2f'''(p) + 3(f''(p))^2 < 0$ entonces p es repulsor.
 Sugerencia: considera la función $\varphi(x) = (f \circ f)(x) - x$ y verifica que $\varphi(p) = \varphi'(p) = \varphi''(p) = 0$. Utiliza el desarrollo de Taylor de φ alrededor de p para estudiar su signo en algún entorno de p y aplica los resultados del ejercicio anterior. (Nuevamente, puedes suponer suficiente regularidad en f).¹
18. En los siguientes casos verifica que 0 es punto fijo de f y que $f'(0) = -1$. Clasifica dicho punto utilizando el resultado del ejercicio anterior.
- (a) $f(x) = -\operatorname{sen}(x)$ (b) $f(x) = -x + x^3$ (c) $f(x) = -x - x^3$ (d) $f(x) = -x + ax^3$
19. Verifica que -1 es el único punto fijo de $f(x) = -e^{x+1}$ y clasifícalo.
20. Ahora sí clasifica el punto fijo α del ejercicio 10 en el caso en que $p = 4$.

1.16. Práctico 15

1. Consideremos la función f dada por:

$$f(x) = (1 - x^2) \operatorname{Arctg}(x) + x L(x^2 + 1) + 2x$$

- (a) E. A. y R. G. de f .
 (b) Discute, según $\lambda \in \mathbb{R}$, el número de raíces de la ecuación $f(x) - \lambda x = 0$.
 (c) Halla A y B para que $\varphi(x) = f(x) - Ax + Bx^3$ sea un infinitésimo del mayor orden posible para $x \rightarrow 0$. Para los valores hallados calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (d) Prueba que $\varphi^{(k)}(0) = 0$, $\forall k = 0, 1, 2, 3, 4$. Investiga si φ presenta máximo, mínimo o punto silla en 0.
2. (a) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{Arctg}(x) - \frac{\pi}{2} \right)$ Se sugiere aplicar L'Hopital a $\frac{\operatorname{Arctg}(x) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$
 (b) E. A. y R. G. de la función f dada por:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} - L|1+x| - x \operatorname{Arctg}(x) + \frac{1}{2} L(1+x^2)$$

- (c) Halla el desarrollo de Mc Laurin de orden 4 de $f(x)$. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. Consideremos la función f dada por:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arctg}(x) + \frac{1}{6} L(x^2 + 1) - \frac{x^2}{6}$$

- (a) E. A. y R. G. de la función f .

¹El número $2f'''(p) + 3(f''(p))^2$ está estrechamente vinculado con la llamada "derivada Schwarziana" de f en p donde $f'(p) = -1$.

- (b) Encuentra el desarrollo de Mac Laurin de orden 8 de f .
Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^4/4}{x^6} \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \exp(1/x)$$

- (c) ¿Existe alguna función g tal que $g(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$? ¿Existe alguna función h tal que $h(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$? Justifica tu respuesta.

4. (a) Halla los ceros de $e^x + x$ con error menor que 0,1.
(b) E. A. y R. G. de la función f dada por:

$$f(x) = \frac{e^x - x}{e^x + x}$$

5. Estudia y grafica las siguientes familias de funciones:

$$f_\lambda(x) = (x+1)L|x| + (\lambda-1)x \qquad f_n(x) = x(1-x)^n \quad (n \in \mathbb{N}, n > 2.)$$

$$f_\lambda(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6\lambda x + 4 \qquad f_\lambda(x) = \lambda x - L(x^2 + 1)$$

$$f_\lambda(x) = \lambda x + L(1 + e^{-x}) \qquad f_\lambda(x) = x - \frac{\lambda x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

6. Consideremos la familia de funciones f_λ dada por

$$f(x) = \frac{\lambda x}{x-2} + L|x-1|$$

- (a) Muestra que si $-2 < \lambda < 0$ entonces f'_λ no tiene raíces; que si $\lambda > 0$ entonces f'_λ tiene dos raíces positivas; y que si $\lambda < -2$ entonces f'_λ tiene dos raíces de distinto signo.
(b) Sin hacer el estudio de la concavidad, grafica los distintos comportamientos para f_λ .

7. Consideremos la familia: $f_\lambda / f_\lambda(x) = (x-\lambda)^2 e^x \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Estudio y gráfica de las f_λ .
(b) Halla el lugar geométrico de los puntos en donde las f_λ tienen tangente horizontal. Grafícalo.
(c) Encuentra el lugar geométrico de los puntos en donde las f_λ tienen inflexión. Grafícalo.

8. (a) E.A. y R.G. de g dada por:

$$g(x) = \frac{2(x-1)}{x} - L(x^2)$$

- (b) Discute, según $\lambda \in \mathbb{R}$ el número de raíces de la ecuación $g(x) - \lambda = 0$.
(c) E.A. y R.G. de la función f dada por:

$$f(x) = \frac{L(x^2)}{x-1}$$

- (d) Estudio y gráfica de los distintos casos de la familia de funciones f_λ dada por:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda + L(x^2)}{x-1}$$

9. (a) Estudio y gráfica de la familia de funciones definida por:

$$g_m : g_m(x) = mx + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (m \in \mathbb{R}).$$

- (b) Estudia ceros y signo de g_m discutiendo según m .

- (c) Estudio y gráfica de la familia:

$$f_m : f_m(x) = m \frac{x^2}{2} + x \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}L(1+x^2) \quad (m \in \mathbb{R}).$$

1.17. Práctico 16

1. En cada uno de los siguientes casos se te da una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ y se te pide:

- (a) Encontrar una expresión para $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

- (b) Calcular $\lim(A_n)$ (en caso que exista).

- (c) Clasificar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en caso de convergencia, calcular su suma.

$$a_n = n \quad a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \quad a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \quad a_n = L\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

2. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ de la cual se sabe que

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{2n+1}{n+3} \quad (n \geq 1).$$

- (a) Clasifica la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y, en caso de convergencia, calcula su suma.

- (b) Calcula a_1 y determina a_n para cada $n \geq 2$.

3. Clasifica las siguientes series y, en caso de convergencia, encuentra la suma de las mismas.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^{n-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. Sean (a_n) , (b_n) y (c_n) sucesiones tales que: $0 < b_n < a_n < 1$, $\forall n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y $c_n = \frac{1-a_n}{1+b_n}$. Clasifica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-c_n)$$

5. Sea f una función de clase C^2 en algún entorno de a y sea $y = t(x)$ la ecuación de la tangente a la $G(f)$ en el punto $(a, f(a))$. Si $\phi(x) = f(x) - t(x)$ ¿qué se puede decir del comportamiento de la serie $\sum \phi\left(a + \frac{1}{n}\right)$?

6. En cada uno de los siguientes casos clasifica $\sum a_n$

$$a_n = \cos \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{1}{2^n} + e^n \quad a_n = \frac{2n+1}{n^2(3n+5)} \quad a_n = \frac{n^3-1}{3n^3+2n^2-4n-9}$$

$$a_n = L\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \quad a_n = e^{1/n^2} - 1 \quad a_n = \frac{(\operatorname{sen} n)^2}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \cos \frac{1}{n}}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^2} \quad a_n = \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \quad a_n = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} + L\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{5n+8}\right)^n \quad a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad a_n = n^q e^{-\gamma n} \quad (q \in \mathbb{R}, \gamma > 0)$$

$$a_n = \frac{2^n}{n^n} \quad a_n = \frac{2^n n!}{n^n} \quad a_n = \frac{3^n n!}{n^n} \quad a_n = \frac{n!}{n^n} \quad a_n = \frac{n!}{(2n)!}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2} \quad a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+4}{3n+1}\right)^n \quad a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+2}$$

7. Sabiendo que $a_n > 0$ y que $\sum a_n$ converge, clasifica las siguientes series o muestra con ejemplos que no es posible afirmar nada.

$$\sum \frac{1}{a_n} \quad \sum a_n^2 \quad \sum \sqrt{a_n} \quad \sum L(1 + a_n)$$

8. Prueba que las siguientes series son absolutamente convergentes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2(-1)^n}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3}$$

Capítulo 2

Miscelánea

2.1. *Desarrollos de Mac Laurin*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\text{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \left(\frac{x}{a^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^3}\right) + \left(\frac{x^3}{a^4}\right) + \dots + \left(\frac{x^n}{a^{n+1}}\right) + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\text{Arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

2.2. Teorema de Taylor

Teorema de Taylor.

Sea f una función que tiene derivadas continuas hasta el orden $n + 1$ en algún intervalo I que contiene al punto 0 como punto interior. Entonces, para cada $x \in I - \{0\}$, existe c_x entre 0 y x tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x) x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Además, este resto $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x) x^{n+1}}{(n+1)!}$ tiene la propiedad de ser un infinitésimo de mayor orden que n para $x \rightarrow 0$, es decir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in I - \{0\}$ fijo y llamémosle A al único número que verifica la igualdad:

$$(*) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + A \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Supongamos, para fijar ideas, que $x > 0$ y consideremos la función auxiliar $\Phi : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + A \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]$$

Esta función es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$ (¿por qué?). Es claro que $\Phi(x) = 0$. Además, si nos basamos en la igualdad (*), nos damos cuenta que también $\Phi(0) = 0$. Resulta entonces que la función Φ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, x]$ y que, por lo tanto, podemos asegurar la existencia de algún punto $c \in (0, x)$ en el cual $\Phi'(c) = 0$. Si calculas la derivada de Φ puedes comprobar que:

$$\Phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + A \frac{(x-t)^n}{n!} = \frac{(x-t)^n}{n!} \left[-f^{(n+1)}(t) + A \right]$$

Resulta entonces que

$$0 = \Phi'(c) = \frac{(x-c)^n}{n!} \left[-f^{(n+1)}(c) + A \right] \implies A = f^{(n+1)}(c)$$

y eso es precisamente lo que queríamos demostrar.

Para la afirmación sobre la propiedad infinitesimal del resto procedemos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(c_x) x^{n+1}}{(n+1)! x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(c_x) x}{(n+1)!}$$

Sabemos que $0 < c_x < x$. Luego, si $x \rightarrow 0$ entonces también $c_x \rightarrow 0$. Resulta entonces que

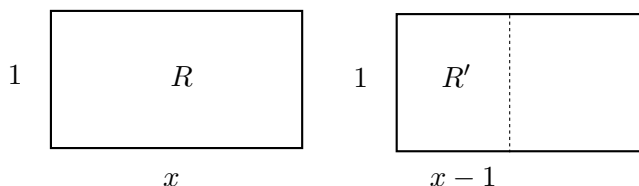
$$\text{Si } x \rightarrow 0 \implies c_x \rightarrow 0 \implies f^{(n+1)}(c_x) \rightarrow f^{(n+1)}(0) \quad (\text{ya que } f^{(n+1)} \text{ es continua})$$

Se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(c_x) x}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(0) \cdot 0}{(n+1)!} = 0$$

2.3. La razón áurea y la sucesión de Fibonacci

En el rectángulo R de la figura superponemos un cuadrado cuyo lado coincide con el lado menor del rectángulo. Obtenemos así otro rectángulo R' . La pregunta es ¿cuál debe ser la proporción entre los lados del rectángulo R para que éste sea semejante a R' ? Este criterio ha sido tomado como sinónimo de “belleza” artística en algunas corrientes de la Pintura y la Escultura. Como sólo nos interesa la proporción, podemos suponer que los lados de R miden 1 y x con $x > 1$.



Los dos rectángulos serán semejantes si, y sólo si, la relación $x/1$ es la misma que $1/(x - 1)$. Esto nos conduce a una sencilla ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{1}{x - 1} \implies x^2 - x - 1 = 0.$$

La única raíz positiva de esta ecuación es:

$$\hat{\varphi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Se trata de un número irracional cuyas diez primeras cifras decimales son $\hat{\varphi} \approx 1,6180339887$. Lo notable es que este valor aparece también como “proporción” de ciertas magnitudes, tanto en el cuerpo humano, como en diversos ámbitos de la Naturaleza. Es por ello que ha sido bautizado como razón (o proporción) “áurea” o “de oro” e incluso “divina”. Hace pocos años, este número fue popularizado mundialmente a partir del libro “El código Da Vinci”. Su autor (Dan Brown)¹ plantea un juego de claves escondidas y acertijos ingeniosos, que permiten a los protagonistas ir descifrando mensajes ocultos. Durante ese periplo, la razón áurea es acompañada por la sucesión de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,), una sucesión que surgió a partir del estudio de la reproducción de conejos y que luego fue re-descubierta en numerosas situaciones que aparecen en la Naturaleza. Pero, ¿qué tiene que ver la razón áurea con la sucesión de Fibonacci? En el curso veremos que están estrechamente relacionadas.

2.4. El interés compuesto y el número e

Consideremos el ejemplo de la evolución de un capital de dinero que genera intereses. Designemos con C al capital inicial (en pesos uruguayos, por ejemplo), y supongamos (para simplificar) que es colocado a una tasa de interés anual que llamaremos r . En cada período “de capitalización” el interés se calculará sobre el capital más los intereses previos (interés compuesto). Si la “capitalización” es

¹El autor decreta que el valor de la razón áurea es 1,618 para (supongo) no entrar en consideraciones matemáticas sobre números irracionales.

anual, entonces al finalizar el primer año, el saldo es la suma del capital inicial más los intereses generados, es decir:

$$S_1 = C + rC = C(1 + r)$$

en donde el subíndice 1 indica que ha transcurrido el primer año. Si designamos con S_2 al saldo al finalizar el segundo año tendremos:

$$S_2 = S_1 + rS_1 = S_1 (1 + r) = C (1 + r)^2$$

No cabe duda (puedes probarlo por inducción) que al finalizar el año número t el saldo será:

$$S_t = C (1 + r)^t$$

Ahora bien, los bancos también ofrecen otro tipo de capitalización. Siempre manteniéndonos con una tasa r de interés anual, se puede pagar los intereses en dos veces al año. Esto se llama “capitalización semestral” y quiere decir que:

$$S_1 = C \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$$

Por ejemplo, supongamos que $C = 10000$ y $r = 0,08$ (tasa anual del 8%). Si la capitalización es anual se obtiene $S_1 = 10800$ y si la capitalización es semestral resulta: $S_1 = 10816$.

Continuando de ese modo, si el interés se capitalizara (pagara) mensualmente, tendríamos

$$S_1 = C \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$$

que en el ejemplo planteado da $S_1 = 10830$. Parece intuitivo que cuanto más a menudo se capitalice el interés, mayor será el saldo final.

(a) Si n es el número de veces por año que se capitaliza el interés, demuestra que

$$S_1 = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \quad S_t = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

(b) Es razonable preguntarse si existe el límite de las expresiones anteriores cuando $n \rightarrow +\infty$. Eso sería algo así como una capitalización “instante a instante” también llamada **capitalización continua**. Demuestra que (para C , r y t fijos)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = C e^{rt}$$

(c) En el caso del ejemplo ($C = 10000$ y $r = 0,08$) calcula el saldo al final del primer año para capitalizaciones semestrales, diarias y continua.

(d) Se invierte 7000 dólares a una tasa de interés anual de 5,75%. Calcula el saldo de la inversión luego de cinco años en cada uno de los siguientes casos:

i) El interés se capitaliza anualmente. ii) El interés se capitaliza mensualmente. iii) El interés se capitaliza diariamente. iv) El interés se capitaliza “continuamente”.

(e) Una persona A invierte 10000 dólares en 1990 y otra persona B invierte 20000 dólares en el año 2000. Si ambos reciben intereses del 4% (capitalizados continuamente) ¿cuáles serán los valores de las inversiones en el año 2010?

Determina la tasa de interés para que A finalice con el mismo capital que B (Sugerencia: la persona A debe tener 20000 dólares en el año 2000).

2.5. *Estudio analítico y representación gráfica*

Dada una función f , los pasos a seguir para su estudio analítico y representación gráfica son los siguientes. Es fundamental ir interpretando gráficamente cada paso del estudio analítico en un borrador. De esa manera irás verificando que no haya contradicciones e irás también conjeturando el aspecto final de la gráfica. Si no lo haces de esta manera . . . no lo lograrás !!!

Paso I: Dominio y Continuidad

Obligatorio: Hallar $D(f)$. Estudiar continuidad. Calcular los límites laterales en los puntos de discontinuidad. **Optativo:** Estudiar paridad y signo de la función. Redefinir la función en los puntos de discontinuidad evitable.

Paso II: Ramas infinitas y asíntotas

Obligatorio: Estudiar las ramas infinitas y la eventual existencia de asíntotas para $x \rightarrow +\infty$ y para $x \rightarrow -\infty$. Dibujar las asíntotas en caso que existan.

Paso III: Crecimiento y extremos relativos

Obligatorio: Estudiar derivabilidad. Calcular $f'(x)$ en los puntos donde exista. Estudiar el signo de $f'(x)$. Reconocer intervalos de monotonía. Hallar los eventuales extremos relativos ubicándolos en la gráfica. Calcular los límites laterales de $f'(x)$ en los puntos de discontinuidad de salto finito. Calcular los límites laterales de $f'(x)$ en los puntos singulares (donde f es continua pero no derivable). **Optativo:** Dibujar las semi-tangentes en los puntos singulares.

Paso IV: Concavidad y puntos de inflexión

Calcular $f''(x)$ en los puntos donde exista. Estudiar el signo de $f''(x)$. Reconocer intervalos de concavidad positiva y negativa. Hallar los eventuales puntos de inflexión ubicándolos en la gráfica. Dibujar las tangentes en los puntos de inflexión.

Paso V: Gráfica final

Se supone que si llegaste a esta altura no tendrás contradicciones de ningún tipo. Esto es fundamental. Una vez que te hayas convencido de ello, debes pasar en limpio los bosquejos previos, para entregar una gráfica lo más prolija posible. No es obligatorio usar papel cuadriculado ni mantener la misma escala en ambos ejes.

Algunas observaciones:

Los Pasos II y III pueden intercambiarse de orden.

En algunas situaciones, cuando los ceros de f' no se puedan hallar por métodos “exactos” de resolución de ecuaciones, puede ser conveniente hallar los ceros de f'' primero. Esto te permitirá aplicar un “método de Rolle” para hallar aproximadamente las raíces de f' . En otras ocasiones convendrá aplicar un “método de Rolle” o “ábacos” al numerador de f' . En fin, se necesita un poco de práctica.

Nunca entregar sin la gráfica o al menos con parte de ella. Mucho cuidado con las con-

tradiciones entre el estudio analítico y la representación gráfica.

Ramas infinitas y asíntotas

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \begin{cases} L & \implies \text{Hay asíntota de ecuación } y = L. \\ \cancel{\exists} & \implies \text{No hay asíntota} \\ \pm\infty & \implies \text{Ir al paso (2)} \end{cases}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \begin{cases} \pm\infty & \implies \text{Hay D.A. paralela a } Oy. \\ 0 & \implies \text{Hay D.A. paralela a } Ox. \\ \cancel{\exists} & \implies \text{No hay asíntota} \\ m \in \mathbb{R} & \implies \text{Ir al paso (3)} \end{cases}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m x) \quad \begin{cases} \pm\infty & \implies \text{Hay D.A. paralela a } y = mx. \\ \cancel{\exists} & \implies \text{No hay asíntota} \\ n \in \mathbb{R} & \implies \text{Hay asíntota de ecuación } y = mx + n \end{cases}$$

En el límite del paso (2) es posible sustituir la función $f(x)$ por su equivalente. Mucho cuidado con el límite del paso (3) ya que ahí no se puede hacer lo mismo. En dicho límite nos encontraremos siempre con una resta de “infinitos” equivalentes entre si, y por lo tanto, **NO** se puede sustituir por equivalentes en esa resta.

El mismo procedimiento hay que repetirlo para $x \rightarrow -\infty$

2.6. Propiedades del valor absoluto

Definición:

$$|u| = \begin{cases} u, & \text{si } u \geq 0. \\ -u, & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Propiedades:

1. $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $|x|^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. $|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ o } A = -B$.
5. $|A| \leq |B| \Leftrightarrow (A + B)(A - B) \leq 0$.
6. $|a b| = |a| |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

2.7. *Un poquito de lógica*

Símbolos lógicos

símbolo	significado	sinónimo
\forall	para todo	para cada
\exists	existe al menos un	
\vee	o incluyente	
\wedge	y	
\implies	implica	entonces
\iff	si, y sólo si	
$H \implies T$	H implica T	Si H entonces T

Proposición recíproca y contrarrecíproca

Consideremos la proposición

(I)

$$H \implies T$$

La proposición **recíproca** de (I) es

$$T \implies H$$

La proposición **contrarrecíproca** de (I) es

$$\text{No } T \implies \text{No } H$$

Si (I) es verdadera entonces su contrarrecíproca también lo es, mientras que su recíproca no tiene por qué serlo.

Condiciones necesarias y suficientes

Si la proposición $H \implies T$ es verdadera entonces se dice que “ H es **condición suficiente** para T ”. (alcanza con que H sea verdadera para que también sea verdadera T). También se dice que “ T es **condición necesaria** para H ”. (si T no es verdadera entonces H tampoco puede serlo).

Si la proposición $H \iff T$ es verdadera entonces se dice que “ H es **condición necesaria y suficiente** para T ”. (T es verdadera si, y sólo si, H también lo es).

2.8. Alfabeto griego y fechas de matemáticos

α A alfa	ι I iota	ρ P rho
β B beta	κ K kappa	σ Σ sigma
γ Γ gamma	λ Λ lambda	τ T tau
δ Δ delta	μ M mi	υ Υ ipsilon
ϵ E épsilon	ν N ni	φ Φ phi
ζ Z zeta	ξ Ξ xi	χ X ji
η H eta	o O ómicron	ψ Ψ psi
θ Θ theta	π Π pi	ω Ω omega

Euclides	(429-348 a.c.)
Eudoxo	(408-355 a.c.)
Arquímedes	(287-212 a.c.)
Rene Descartes	(1596-1650)
Pierre de Fermat	(1601-1665)
Blaise Pascal	(1623-1662)
Isaac Newton	(1642-1727)
Jacobo Bernoulli	(1654-1705)
G. W. Leibniz	(1646-1716)
Juan Bernoulli	(1667-1748)
Daniel Bernoulli	(1700-1784)
Leonard Euler	(1707-1783)
Joseph Lagrange	(1736-1813)
Pierre Simon de Laplace	(1749-1827)
Joseph Fourier	(1768-1830)
Karl Gauss	(1777-1855)
Bernard Bolzano	(1781-1848)
A. L. Cauchy	(1789-1857)
Nikolas Lobatchewsky	(1793-1856)
Niels Abel	(1802-1829)
Evariste Galois	(1811-1832)
Karl Weierstrass	(1815-1897)
Bernhard Riemann	(1826-1866)
Henri Poincaré	(1854-1912)
George Cantor	(1845-1918)
David Hilbert	(1862-1943)

2.9. Programa

1. El conjunto \mathbb{R} de los números reales.

Axiomas operatorios y sus consecuencias. Axiomas de orden, definición y propiedades de la desigualdad. Conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} . Teorema de inducción completa. Cotas, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de subconjuntos de \mathbb{R} . Axioma de completitud y sus consecuencias (\mathbb{N} no acotado superiormente, Arquímedes, densidad de \mathbb{Q} y de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, existencia de raíz cuadrada de elementos positivos). Potenciación, radicación y logaritmación en \mathbb{R} (sin demostraciones). Valor absoluto y distancia. Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Entornos. Nociones de topología en \mathbb{R} . (Conjuntos abiertos y cerrados). Puntos de acumulación. Teorema de Bolzano Weierstrass.

2. Sucesiones y sus límites.

Sucesiones. Límites finitos e infinitos. Acotación de las sucesiones convergentes. Propiedades de los límites (en particular: unicidad, conservación del signo y sucesión comprendida). Operaciones con límites (teoremas de límite de suma, producto y cociente). Indeterminaciones. Sucesiones equivalentes. Algunos métodos para calcular límites. Sucesiones monótonas. Estudio de sucesiones definidas por recurrencia. Definición de número e (sin demostración). Límites de las sucesiones potencial, exponencial, logarítmica y trigonométricas Límites tipo y equivalentes. Subsucesiones. Órdenes de infinitos. Más métodos para calcular límites. Nociones sobre puntos de aglomeración. Toda sucesión acotada tiene alguna subsucesión convergente.

3. Conceptos básicos sobre funciones reales.

Definición, ejemplos y gráficas de funciones. Funciones potencial, exponencial, logarítmica y trigonométricas. Paridad e imparidad. Composición de funciones. Límites de funciones. Teoremas de “pasaje”. Aplicaciones.

4. Continuidad.

Definición de continuidad. Funciones continuas en todo su dominio. Operaciones con funciones continuas. Composición de funciones continuas. Estudio de funciones definidas “a trozos”. Extremos absolutos. Continuidad en un intervalo cerrado. Teoremas de Weierstrass, Bolzano y Darboux.

5. Derivabilidad.

Derivabilidad de una función en un punto. Derivada. Interpretación geométrica y cinemática. Relación entre derivabilidad y continuidad. Función derivada de las funciones elementales. Reglas de derivación (derivada de suma, producto y cociente). Regla de la cadena (derivada de la función compuesta). Velocidad y aceleración. Estudio de derivabilidad de funciones definidas “a trozos”. Reglas de L'Hôpital (sin demostración).

6. Comportamiento de funciones.

Extremos relativos y puntos “silla”. Crecimiento puntual. Condición necesaria de extremo relativo. Teoremas de Rolle y Lagrange. Crecimiento en un intervalo. Problemas de extremos (optimización). Modelos continuos de evolución.

7. El problema inverso de la derivación.

Teorema sobre derivada nula. Primitivas. Primer teorema fundamental del cálculo integral. Aplicaciones a la Física. Resolución de algunas ecuaciones diferenciales.

8. **Estudio analítico y representación gráfica.**
Concavidad. Asíntotas. Estudio analítico y representación gráfica de funciones. Métodos de separación y aproximación de raíces. El método de Newton. Familias de funciones.
9. **Función inversa.**
Función inversa. Existencia, monotonía, continuidad y derivabilidad de la función inversa. Inversas trigonométricas.
10. **Aproximación de funciones por polinomios.**
Órdenes de infinitésimos. Teorema de Taylor. Obtención de los desarrollos de Mac Laurin básicos. Aplicaciones de Taylor al cálculo de límites, al cálculo numérico y al reconocimiento de puntos estacionarios. Irracionalidad del número e .
11. **Nociones sobre sistemas dinámicos discretos.**
Puntos fijos y periódicos. Atracción y repulsión. Método gráfico. Estudio de $x_{n+1} = f(x_n)$. Órbitas atractoras y repulsoras. Nociones sobre el concepto de “caos”.
12. **Series numéricas.**
Series: definición, ejemplos y propiedades básicas. Serie geométrica. Series de términos positivos. Criterios de comparación y del equivalente. Criterio de Cauchy. Criterio de D'Alembert (sin demostración). Criterio de la primitiva. Fórmula de Stirling (sin demostración). Criterio de Leibniz (sin demostración). Convergencia absoluta (sin demostración).

2.10. Bibliografía

Nivel básico (textos que no profundizan en el aspecto matemático y que casi no incluyen demostraciones, pero que contienen una gran cantidad de ejemplos, ejercicios y aplicaciones).

1. **Budnick**, *Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. McGraw Hill, Tercera Ed.
2. **Hoffman, L.D. - Bradley, G.L.**, *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. McGraw Hill, Sexta Ed. 1998.
3. **Larson - Hostetler - Edwards**, *Cálculo Volumen 1*. McGraw Hill, Quinta Ed. 1995.
4. **Smith, R - Minton, R.**, *Cálculo Tomo 1*. McGraw Hill, Primera Ed. 2000.

Nivel intermedio (los que más se ajustan a nuestros objetivos y que también te van a servir en Facultad).

1. **Apostol, T.**, *Calculus Volumen 1*. Reverté, 1985.
2. **Belcredi, L. - Zambra, M. - Deferrari, M.**, *Introducción al análisis matemático*. Ediciones de la Plaza, 2001.
3. **Courant, R. - John, F.**, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. I* Limusa Segunda Ed. 1979.
4. **Giovannini, E.**, *Matemática A para sexto año*. 1998.
5. **Moretti, J.**, *Cálculo en el mundo de las desigualdades*. Fundación Cultura Universitaria, 2004.
6. **Peláez, F.**, *CÁLCULO* (Libro de texto del curso Matemática I de la Facultad de Ciencias Económicas). DeLaTaplan Ed, 2006.
7. **Spivak, M.**, *Cálculo Infinitesimal*. Reverté, Segunda Ed. 1992.

Nivel superior o lecturas especiales

1. **Apostol, T.**, *Análisis Matemático*. Reverté, 1982.
2. **Lima, E.L.**, *Curso de Análise Vol. 1*. Projeto Euclides, IMPA.
3. **Linés, E.**, *Principios de análisis matemático*. Reverté, 1983.
4. **Gil, O.**, *Curso introductorio a las ecuaciones diferenciales*. Imprenta Giros, 2000.
5. **Peláez, F.**, *De las cuevas ... al Solís (cronología del rock en Uruguay.)* Perro Andaluz, 2002 y 2004.
6. **Rudin, W.**, *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill, 1980.