

1) Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales (si ambos son agudos o ambos son obtusos) o suplementarios (si uno es agudo y el otro es obtuso).

2) a) Si un triángulo tiene dos lados desiguales, a mayor lado se opone mayor ángulo. Enuncie y demuestre el correspondiente teorema recíproco.

b) Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos (propiedad conocida como *desigualdad triangular*).

c) Cada lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos.

d) Para que tres segmentos arbitrarios puedan ser lados de un triángulo, es condición necesaria y suficiente que el mayor de los tres segmentos sea menor que la suma de los otros dos.

3) a) De todos los segmentos de recta comprendidos entre un punto O y una recta MN, el segmento perpendicular es el más corto.

La menor distancia de un punto a una recta se obtiene sobre la perpendicular trazada del punto a la recta. Habitualmente se llama **distancia** del punto a la recta.

Llamamos **proyección de un segmento sobre una recta** al segmento determinado por los pies de las perpendiculares a la recta bajadas desde los extremos del segmento.

b) Dos segmentos sobre una recta no perpendicular a otra dada que tengan proyecciones iguales, son iguales.

4) Llamamos **mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al mismo por su punto medio**.

a) Pruebe que un punto de la **mediatriz** equidista de los extremos del segmento. Enuncie y pruebe el recíproco.

b) Pruebe que las mediatrices de dos lados de un triángulo se cortan.

c) Demuestre que la tercera mediatriz del triángulo corta a las otras dos en el mismo punto (al que se llama **circuncentro** del triángulo).

d) Pruebe que el circuncentro equidista de los vértices del triángulo.

e) Trace el circuncentro de un triángulo: i) acutángulo, ii) rectángulo, iii) obtusángulo. Demuestre que el circuncentro de un triángulo rectángulo es el punto medio de la hipotenusa.

f) Pruebe que si un punto no pertenece a la mediatriz de un segmento, está más cerca del extremo del segmento que pertenece al mismo semiplano cuyo borde es la mediatriz, que del otro extremo.

5) Llamamos **bisectriz de un ángulo** al rayo interior que lo divide en dos ángulos iguales.

a) Pruebe que si un punto está en la bisectriz del ángulo, equidista de los lados del ángulo. Enuncie y demuestre el recíproco.

b) Pruebe que las bisectrices de dos ángulos interiores de un triángulo se cortan.

c) Demuestre que la tercera bisectriz del triángulo corta a las otras dos en el mismo punto (al que se llama **incentro** del triángulo).

d) Pruebe que el incentro equidista de los lados del triángulo.

e) Pruebe que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo es perpendicular a la bisectriz del ángulo adyacente.

f) Demostrar que las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son perpendiculares, y las bisectrices de dos ángulos opuestos son paralelas.

6) Una figura es **convexa** si todo par de puntos de la figura determina un segmento contenido en la figura.

a) Muestre que son convexas las siguientes figuras: i) un semiplano, ii) una recta, iii) una semirecta.

b) Demuestre que si en la intersección de dos figuras convexas hay más de un punto, entonces dicha intersección también es una figura convexa. ¿Un triángulo es convexo?

7) Llamamos **mediana de un triángulo** al segmento que tiene por extremos un vértice y el punto medio del lado opuesto.

a) Pruebe que las medianas de dos lados de un triángulo se cortan.

b) (!) Pruebe que la tercera mediana del triángulo corta a las otras dos en el mismo punto (al que se llama **baricentro** del triángulo).

c) Pruebe que la distancia del baricentro al punto medio de un lado es la mitad de la distancia del baricentro al vértice opuesto a ese lado.

8) Llamamos **altura de un triángulo** al segmento de perpendicular con un extremo en un vértice y el otro en la recta que contiene al lado opuesto.

a) Pruebe que las rectas que contienen a dos alturas de un triángulo se cortan.

b) Pruebe que la recta que contiene a la tercera altura corta a las otras dos en el mismo punto (al que llamamos **ortocentro** del triángulo).

c) Trace el ortocentro de un triángulo: i) acutángulo, ii) rectángulo, iii) obtusángulo.

9) a) Pruebe que en un triángulo isósceles la mediatriz de la base contiene a la bisectriz, a la mediana y a la altura respecto a la base.

b) Todo triángulo isoángulo es isósceles.

c) En todo triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo exterior que tienen como vértice el punto al que concurren los lados iguales, es paralela al otro lado.

10) a) Si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, es un paralelogramo.

Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, es un rectángulo.

b) Un rectángulo es un paralelogramo cuyas diagonales son iguales.

c) Un paralelogramo con sus diagonales iguales, es un rectángulo.

d) Un rombo tiene sus diagonales perpendiculares.

11) a) Dado un segmento AB, hallar M interior tal que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$.

b) Dados tres segmentos a, b, c, hallar un cuarto segmento d tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

12) Dos triángulos se dicen **semejantes** cuando tienen los ángulos respectivamente iguales.

a) Una recta paralela a un lado de un triángulo, y que no pasa por el vértice opuesto a ese lado, determina con las rectas que contienen a los otros dos lados un triángulo semejante al dado.

b) Dos triángulos son semejantes cuando los tres lados de uno de ellos son respectivamente proporcionales a los tres lados del otro.

c) Calcule la altura de una torre midiendo la longitud de su sombra.

13) Llamamos **razón de semejanza** a la razón de proporcionalidad entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes.

a) Pruebe que la razón entre las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

b) Construya un triángulo cualquiera y otro semejante a él que tenga perímetro doble.

c) En un plano de escala 1:200 un segmento mide 5 cm. ¿Cuál es su medida real?

d) Dos segmentos sobre una recta no perpendicular a otra dada que tengan proyecciones desiguales, son desiguales, y es mayor el que tiene proyección mayor.

14) Teorema de Pitágoras: el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

a) Exprese el enunciado algebraicamente.

b) Calcule la altura respecto al vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 29 m y un cateto de 21 m.

c) Construya segmentos cuyas medidas sean $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{53}, \sqrt{129}$, (tome como unidad el cm) usando regla y escuadra.

d) Enuncie el recíproco del teorema de Pitágoras.

e) Un triángulo tiene lados que miden: a = 119 m, b = 160 m y c = 199 m. ¿Tiene algún ángulo recto? ¿Cuál?

15) Dos triángulos ABC y A'B'C' rectángulos en C y C' con un ángulo agudo igual son semejantes. En este caso, se pueden

definir las razones: $\text{sen}A = \frac{a}{c}$, $\text{cos}A = \frac{b}{c}$, $\text{tg}A = \frac{a}{b}$.

a) Calcule $\text{sen}30^\circ$, $\text{cos}30^\circ$, $\text{tg}30^\circ$, $\text{sen}45^\circ$, $\text{cos}45^\circ$ y $\text{tg}45^\circ$. Justifique.

b) Demuestre que en todo triángulo acutángulo se cumplen las relaciones: $\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{\text{sen}B}{b} = \frac{\text{sen}C}{c}$, y $a^2 + b^2 = c^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{cos}C$.

16) Dado un punto O y una razón k distinta de cero definimos **homotecia de centro O y razón k** como la correspondencia que a cada punto P del plano le hace corresponder otro punto P' tal

que: i) si $k > 0$, $P' \in$ semirrecta $OP \wedge \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = k$, y

ii) si $k < 0$, $P' \in$ semirrecta opuesta a $OP \wedge \frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = -k$.

a) Dados A, B y O no alineados, halle A' y B' en la homotecia de centro O y razón 2.

b) Ídem si la razón es: 1/2, 2/3, 1, 9/5, -1/2, y -4/3.

c) Pruebe que cualquiera sea la razón, $AB \parallel A'B'$.

d) Demuestre que si dos triángulos se corresponden en una homotecia entonces son semejantes.

17) Inscribir un triángulo equilátero en un cuadrado, de modo que un vértice del triángulo sea también vértice del cuadrado.

18) ABCD es un trapecio horario isósceles ($\overline{DA} = \overline{CB}$) tal que $\angle ABC = 75^\circ$ y $\angle DBC = 30^\circ$. $AD \cap BC = \{M\}$.

a) Pruebe que AMB es isósceles. b) Sea $DB \cap CA = \{P\}$. Calcule $\angle CPB$. c) Demuestre que los triángulos ACD y BCD son iguales.