LECTURA COMPLEMENTARIA Nº 1.

MÉTODOS DE ESTRUCTURA DE LA MATEMÁTICA.

Los elementos que constituyen la estructura de la Matemática son de dos tipos: por una parte los *conceptos*, por otra las *proposiciones y relaciones* que se refieren a esos conceptos. Igualmente encontraremos dos procesos diferentes: por una parte un encadenamiento de conceptos que constituye el proceso de *conceptuación*; por otra parte, un encadenamiento o procesos de reducción entre proposiciones y relaciones que permite pasar de unas a otras, llamado *demostración*. El estudio de los métodos de conceptuación y de demostración constituye lo esencial de la *metodología matemática*.

CONCEPTUACIÓN MATEMÁTICA.

En Lógica suelen clasificarse los conceptos en *individuales* y *específicos*: los primeros se refieren a objetos particulares, los segundos a grupos de objetos que tienen ciertas propiedades comunes. La colección de objetos a los cuales es aplicable el concepto específico constituye la *extensión* del mismo; la colección de propiedades que lo determinan constituye su *comprensión*. Cuanto más general es un concepto, mayor es su extensión y menor su comprensión, y recíprocamente.

Los conceptos matemáticos son abstractos (es decir, tienen su existencia en la mente humana) y resultan de considerar objetos o grupos de objetos (reales o pensados) a los que se supone desprovistos de su contenido, y sólo referidos a ciertas relaciones, de manera que resultan identificados, desde el punto de vista matemático, dos objetos o grupos de objetos semejantes respecto a aquellas relaciones. Resulta de aquí que los conceptos matemáticos son siempre específicos o genéricos, pero no individuales.

La extensión de los conceptos matemáticos es generalmente infinita, no así su comprensión, la que es susceptible de fijarse con entera precisión, agotando las propiedades características que la determinan. Resulta de esto, que la conceptuación en matemáticas es más simple y perfecta que en otras disciplinas.

Dado un cierto grupo de propiedades, para que ellas constituyan la comprensión de un concepto matemático es necesario probar la *existencia* y *unicidad*. Se considerará satisfecha la condición de *existencia* cuando se haya probado que hay un sistema de entes matemáticos que poseen esas propiedades. Se dirá satisfecha la condición de *unicidad* cuando se haya probado que hay un solo sistema de entes que tiene esas propiedades. Esto último requiere una aclaración: decir que el sistema es *único*, o "esencialmente único", según el lenguaje de Veblen, significa que, si hay dos sistemas de entes que satisfacen al grupo de propiedades, entre esos dos sistemas hay un isomorfismo, es decir, una correspondencia biunívoca que deje invariantes esas propiedades.

Las condiciones de existencia y unicidad se traducen matemáticamente en lo siguiente: *la introducción de nuevos conceptos no tendrá valor si no viene acompañada por un teorema o postulado existencial y otro de unicidad*.

Las diversas formas de conceptuación suelen clasificarse en *creadoras* y *tautológicas*; son creadoras aquellas que introducen un concepto que resulta ampliación del campo de conceptos de la teoría, y tautológicas aquellas que sirven para dar un nombre a un concepto ya creado.

Últimamente se ha atribuido mucha importancia a la distinción entre conceptuación *existencial* y conceptuación *constructiva*; difieren esencialmente en la manera de probar la existencia, pues, mientras en la conceptuación existencial se exige la demostración de la no contradicción del nuevo concepto, y sin más se afirma la existencia, en alas definiciones constructivas se avanza más, dándose por probada la existencia del nuevo concepto solamente cuando se ha establecido un método de cálculo que permita determinar en cada caso el ente matemático representativo del concepto.

Los tipos de conceptuación que más interesan a la Matemática son: 1°) las definiciones nominales explícitas; 2°) las llamadas definiciones por abstracción; 3°) las definiciones por recurrencia, 4°) la axiomática.

Definiciones nominales explícitas.

Este tipo de conceptuación, que constituye el único tipo de definiciones propiamente dichas, tiene por objeto introducir palabras nuevas para designar combinaciones lógicas de conceptos ya definidos. El carácter nominal alude a que la definición se refiere a la palabra, y representa una convención de lenguaje, pues introduce una palabra simple para representar un concepto complejo ya conocido.

Ejemplo: Diremos que un número natural es *primo* cuando no tiene otros divisores que sí mismo y la unidad.

Las definici9ones nominales explícitas corresponden generalmente al tipo de definiciones llamadas por género próximo y diferencia específica o definiciones por clasificación.

Una definición de este tipo constituye una convención y no una proposición, puesto que no es ni verdadera ni falsa.

Estas definiciones son tautológicas y lógicamente eliminables, lo que puede realizarse reemplazando la palabra o símbolo nuevo por su equivalente lógico.

Definiciones por abstracción.

Si los elementos de una clase se agrupan según determinado criterio en subclases, y se consideran idénticos los elementos de cada subclase, es decir, se fija la atención únicamente en los caracteres comunes de los elementos de cada subclase, no considerando los caracteres diferenciales; el conjunto de los caracteres comunes se considera como la comprensión de un nuevo concepto que se dice ha sido definido por *abstracción*.

Ejemplos: Se desea definir el concepto de número racional, supuesta conocida la teoría de los números naturales. Sea N la clase de los números naturales y sean a, b, c, d, números naturales. Se llama número racional (y lo indicaremos en la forma a/b) a la función de un par de números naturales, tal que la igualdad venga caracterizada en la siguiente forma: *un número racional a/b es igual a otro c/d cuando se verifica la igualdad ad = bc entre números naturales*.

Las definiciones por abstracción constituyen uno de los recursos más fecundos de la Matemática, permitiendo conjuntamente con las definiciones por recurrencia, desarrollar el método genético mediante el cual se efectúan las sucesivas ampliaciones de las teorías de la Matemática. Así, por ejemplo, partiendo del concepto de número natural se puede definir por abstracción los números racionales, de éstos pasar por igual camino a los reales, y de aquí a los complejos.

El método genético, que permite elevarse de los conjuntos simples hasta los más complejos, tiene como norma el principio enunciado por Hänkel, llamado de *permanencia de las leyes formales*: "Al generalizarse un concepto se debe tratar de conservar el mayor número de propiedades, y al nuevo concepto debe corresponder como caso particular el generalizado". Esta generalización se realiza por una ampliación del contenido de los símbolos de una teoría, de tal manera que conserven su estructura formal.

Las definiciones por abstracción son creadoras, puesto que permiten ampliar el campo de los conceptos matemáticos. Al respecto deben distinguirse en el proceso de las definiciones por abstracción dos partes: la primera, que consiste en dar un criterio de igualdad, y la segunda en probar la existencia y unicidad del nuevo concepto; el poder creador está en esta segunda parte del proceso, como lo hace notar Couturat.

Definición por recurrencia.

Constituyen un caso muy importante de conceptuación matemática, las definiciones por recurrencia, así llamadas porque utilizan el principio de inducción completa. Constituyen otro de los recursos fundamentales del método genético. Indudablemente son, más que definiciones, un método de razonamiento constructivo.

Veamos, como ejemplo, la definición por recurrencia de la suma de números naturales.

Aceptamos como ya definidos el ***número natural*** y el concepto de ***siguiente de un número natural***, es decir que si a es un natural, su siguiente $(a + 1)$ también lo es **(1)**.

También aceptamos el Principio de Inducción Completa (del que trataremos más adelante)**(2)**.

Sean a y x números naturales.

Damos a continuación las siguientes definiciones explícitas:

$a + 0 = a$ Def. **(3)**

$a + (b + 1) = (a + b) + 1$ Def. **(4)**

Probaremos que con estas hipótesis queda definida cualesquiera que sean los números naturales a y b, la suma $a + b$.

En efecto, por **(3)** resulta la definición para 0. **(5)**

Por **(4)** suponiendo válida la definición para x puede generalizarse para $x + 1$. [Es decir, H) para x: $a + (x + 1) = (a + x) + 1$ (aplicamos la Def.(4) para $b = x$)
T) aplicada para $b = x +1$ resulta:
$a + [(x + 1)+ 1] = [a + (x + 1)] + 1$ surge directamente de la H)] **(6)**

De **(5)** y **(6)** por el principio de inducción completa **(2)** resulta la definición para todos los números.

Debe distinguirse en este proceso también, como en el de las definiciones por abstracción, lo que es propiamente definición, de la demostración que sirve para justificarla, probando la existencia y unicidad. La creación está precisamente en la demostración.

Axiomática.

La axiomatización de un teoría consiste en establecer un grupo de conceptos llamados ***conceptos primitivos*** y un grupo de proposiciones y relaciones llamadas ***proposiciones y relaciones primitivas*** tales que: 1°) los conceptos primitivos no se definen explícitamente, únicamente se enuncian; 2°) Las proposiciones primitivas se aceptan como verdaderas sin demostración; 3°) las proposiciones primitivas deben caracterizar en forma unívoca y completa a los conceptos primitivos y también a las relaciones primitivas que, unidas a las de la lógica, constituirán los recursos operatorios con los cuales deberá edificarse deductivamente toda la disciplina.

Las proposiciones primitivas suelen llamarse indistintamente ***axiomas*** o ***postulados de la teoría.*** La caracterización de los conceptos primitivos mediante el sistema de axiomas se dice que constituye una definición implícita de estos conceptos.

El sistema de axiomas de una disciplina no es único; pueden darse diversos sistemas equivalentes e igualmente aceptables; una misma proposición puede ser axioma y teorema en otro. Como se trata de sistemas equivalentes de una misma disciplina, debe darse la condición de que los axiomas de un sistema resulten proposiciones deducibles en el otro y viceversa.

Teóricamente son posibles tantas disciplinas matemáticas como sistemas de postulados, desde el punto de vista lógico sólo está regido por las siguientes condiciones que luego analizaremos detalladamente: ***compatibilidad***, ***independencia*** y ***saturación*** (***integridad*** o ***completicidad***).

Cabe ahora la siguiente pregunta: ¿Cuál es el origen de los axiomas?

¿Son ellos reductibles a principios lógicos, o son arbitrarios, o provienen de la intuición, o son productos de la experiencia? Muy divididas están al resp0ecto las opiniones, debiendo buscarse la solución en el terreno filosófico. Podemos considerar a los axiomas en su aspecto formal, es decir, como proposiciones convencionalmente elegidas y a las que sólo se les exige que cumplan las tres condiciones anteriormente enunciadas.

También pueden considerarse como elementos primarios e irreductibles en el análisis lógico de una disciplina ya constituida.

En la Matemática el método axiomático fue iniciado por Euclides, quien ya organiza la Matemática, partiendo de un sistema de proposiciones fundamentales, los postulados y axiomas, de los cuales deduce lógicamente toda la Matemática. Aunque Euclides no realiza su propósito en forma perfecta, su obra significa la mayor de las contribuciones a la Metodología de las Matemáticas.

Hilbert y su escuela han dado al método axiomático el alto grado de perfección con que actualmente lo conocemos, habiendo llegado merced a esos trabajos a construirse conjuntamente con el método genético, en los métodos únicos con los cuales se fundamentan y desarrollan las diferentes ramas que constituyen la Matemática.

Dice Hilbert:

"Quisiera reunir en cuatro palabras mi concepto general del método axiomático.

Según mi opinión, todo lo que puede ser objeto de pensamiento científico, se adquiere por el método axiomático, y, por tanto, e indirectamente, por la Matemática, siempre que su forma esté en sazón para una teoría. Mientras más penetremos en las capas cada vez más profundas, seremos más concientes de la unidad de nuestros pensamientos. Por último, la Matemática parece llamada a desempeñar un papel director en el edificio de las ciencias constituidas por el método axiomático."

En efecto, en la Mecánica, en cada una de las ramas de la Física, y de la Química, en la Biología y en general en casi todas las disciplinas científicas y aun en las que constituyen las Humanidades, se trata de establecer una sistematización, consistente en un encadenamiento y ordenación lógica de los conceptos y proposiciones que las constituyen, de manera que una proposición o concepto posterior esté lógicamente fundamentado en los anteriores; en esta ordenación hay un grupo primario de proposiciones y conceptos. Éstos nos indican que estas disciplinas tratan de estructurarse conforme al método axiomático.

Compatibilidad de los axiomas.

Se dice que un sistema de axiomas es *compatible* cuando se ha probado que, operando lógicamente con ellos, [no] es posible llegar a demostrar dos proposiciones opuestas contradictorias. El problema de la compatibilidad o de la *no contradicción* de un sistema de axiomas es el problema lógico por excelencia, pues la existencia de una contradicción en una teoría la invalida completamente. Dice Hilbert: "Por su misma a esencia, el método axiomático tiene exigencias mucho más extremas y, en particular, debe demostrarse que, en cada caso y sobre la base de axiomas aceptados, las contradicciones son absolutamente imposibles dentro del interior del campo científico".

Para los formalistas (Hilbert y su escuela) la compatibilidad tiene un contenido fundamental, pues basta haberla demostrado para un sistema de axiomas para poder afirmar la existencia de los entes que el sistema de axiomas define, es decir, "ser compatible" y "existir" son para ellos sinónimos.

El problema de la compatibilidad ha sido atacado con pleno éxito en casi todas las teorías matemáticas; así, por ejemplo, Hilbert demuestra de una manera acabada, la no contradicción de la Geometría, aceptando la no contradicción de la teoría de los números reales; la aritmetización del Análisis reduce también su no contradicción a la de los números reales; la no contradicción de éstos se reduce a su vez a la de los números naturales y de la teoría de conjuntos, disciplinas que desempeñan por esto el papel especial de cimientos de la Matemática.

Los problemas de compatibilidad de la Aritmética de los números naturales y de la teoría de conjuntos son hoy los problemas capitales de la fundamentación formalista de la Matemática; arduos problemas ésos, aún no resueltos totalmente.

Independencia de un sistema de axiomas.

Se dice que los axiomas A_1, A_2, …, A_n de un sistema son independientes, cuando se demuestra la imposibilidad de que uno cualquiera de ellos, pueda ser reducido de los demás. Para probar la independencia de uno de los axiomas, por ejemplo, el A_i, basta probar que es compatible el sistema formado por los demás axiomas y la negación del A_i, puesto que, si esto se demostrara, resultaría que A_i no puede ser deducido de los otros, ya que al mismo tiempo se acepta su negación. Para efectuar esto se construyen disciplinas artificiales compatibles, las cuales son modelos que satisfacen estos sistemas de axiomas.

La historia de la Matemática nos da un notable ejemplo que prueba la importancia del concepto de independencia de los sistemas de axiomas: durante más de veinte siglos los matemáticos se esforzaron infructuosamente en demostrar el axioma V de Euclides, o postulado de las paralelas, hasta que Gauss, Lobatschwskij, Bolyai y Riemann plantearon y resolvieron el problema de la independencia de este postulado, creando las geometrías no euclidianas, las cuales contienen los mismos postulados que la geometría euclidiana, excepto el V, que se reemplaza por su negación.

Saturación, integridad o completicidad de un sistema de axiomas.

Correspondiendo a la unicidad den los otros tipos de conceptuación aparece el problema llamado de integridad, de saturación o completicidad de un sistema de axiomas. Este problema ha sido formulado de dos maneras que no son equivalentes entre sí: una formulación amplia y otra más restringida, pero más precisa.

La formulación amplia del problema de integridad puede enunciarse en la siguiente forma: sea un sistema de axiomas A_1, A_2, …, A_n; agregar un nuevo axioma A_{n+1} es limitar el campo de validez del sistema. Cuando A_{n+1} es independiente de los anteriores y puede ser reemplazado por otro axioma de manera que el sistema quede compatible, se dice que el sistema A_1, …, A_n es bifurcable, es decir, es posible agregar otro axioma independiente sin que el sistema deje de ser compatible. Un sistema no bifurcable se dice que es ***saturado*** o ***completo***.

Este problema está íntimamente ligado a otro llamado "de la determinación" que puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿En una teoría matemática fundamentada axiomáticamente, toda proposición formuladle en los términos de la teoría es necesariamente demostrable o refutable?

Si el sistema de axiomas es saturado en el sentido anteriormente indicado, la respuesta es afirmativa, es decir, el sistema cumple la condición de determinación, puesto que si existiera una proposición que no fuera demostrable ni refutable podría ser tomada como axioma independiente.

Una formulación más restringida del problema de integridad es la dada por Veblen y designada por él mismo con de categoricidad; es la siguiente: se dice que un sistema de axiomas cumple la condición de categoricidad cuando ellos caracterizan esencialmente un sistema de entes, es decir, si hay dos sistemas de entes M y M' que los satisfacen, se puede establecer entre M y M' un isomorfismo, o sea una correspondencia biunívoca que deje invariante las propiedades definidas por los axiomas.

La categoricidad es más precisa y más fácilmente verificable que la integridad, por cuanto se refiere directamente a los entes. La categoricidad corresponde a la integridad (Vollständikgeit) de Hilbert, introducida por éste como axioma, tanto en la axiomática del número real como en la de la Geometría.

Las demostraciones matemáticas.

Se llama demostración o raciocinio matemático a la combinación o enlace de dos o más preoposiciones para obtener nuevas proposiciones y relaciones. Una proposición o relación obtenida por ese camino de otras proposiciones o relaciones anteriormente establecidas, mediante un número finito de pasos, se dice deducida de éstas o demostrada.

Todas las proposiciones y relaciones de la Matemática quedan clasificadas en dos tipos, las proposiciones deducidas, llamadas teoremas, y las aceptadas sin demostración, que son las definiciones y los axiomas. Se considera no justificada y debe ser eliminada toda otra proposición o relación.

El esquema de la demostración es:

1°) Se acepta que a es verdadero (hipótesis).
2°) $a \Rightarrow b$ (demostración).
3°) b es verdadero (tesis).

1° - Se sabe que la hipótesis a es verdadera, o porque es axioma, o porque es tesis de otra demostración anteriormente dada.

2° - Resulta por combinaciones de los procedimientos demostrativos que a implica b.

3° - Se afirma que b es verdadera.

Suele hacerse la siguiente distinción entre las demostraciones: si resulta que b está incluida en a, porque es menos general, o porque es una parte de ella, se dice que la demostración es ***tautológica***. Si, por el contrario, b fuera más general que ***a*** o heterogénea con ella, es decir, fuera una afirmación no contenida en ***a***, la demostración se diría ***creadora***.

Se presenta ahora el problema fundamental de precisar cuáles son los recursos y métodos con que cuenta para demostrar la propiedad ***b*** partiendo de la ***a***. Esos recursos deben pertenecer a la Lógica o estar contenidos en los axiomas de la respectiva teoría. Toda disciplina que cumple con esta condición y con las impuestas a la conceptuación matemática se dice disciplina ***formalizada***.

La formalización de la Matemática es una característica esencial de ella; suele también expresarse diciendo que la Matemática es una ciencia ***racional***, ***deductiva*** o ***exacta***.

De lo dicho anteriormente resulta que el complejo ***Lógico-Sistema-Axiomático***, constituye la única fuente en la cual el matemático debe buscar los procedimientos que le permitan elaborar su disciplina, o también se dice: ***todo teorema de una disciplina es implicado por el sistema de axiomas de la disciplina, más los axiomas de la lógica***.

A continuación nos ocuparemos de los más importantes procedimientos de demostración.

Demostraciones directas y por reducción al absurdo.

Dadas dos proposiciones, una h que llamaremos hipótesis y otra t que llamaremos tesis, el enlace de estas dos proposiciones o sus negaciones entre sí por medio del signo $\Rightarrow$ (implicación) es el tipo más común de los teoremas; caben los siguientes casos:

1°) $h \Rightarrow t$ que se llama ***teorema directo***; si es válido el teorema directo diremos que h es condición suficiente para que se cumpla t.

2°) $t \Rightarrow h$ que se llama ***teorema recíproco***; si vale el teorema recíproco se dice que h es condición necesaria para que se cumpla t.

Si valen al mismo tiempo el teorema directo y el recíproco, lo que generalmente no sucede, se dice que h es condición ***necesaria y suficiente*** para que se cumpla t.

3°) (negación de h) $\Rightarrow$ (negación de t) se llama ***teorema contrario***. Por el principio lógico del tercero excluido, resulta que este es equivalente a $t \Rightarrow h$, es decir, el recíproco es equivalente al contrario.

4°) (negación de t) $\Rightarrow$ (negación de h) se llama ***teorema contrarrecíproco***. Del mismo principio lógico resulta que este teorema es equivalente a $h \Rightarrow t$, es decir, el directo y el contrarrecíproco son equivalentes.

Esta última propiedad nos permite justificar un tipo de razonamiento llamado "por reducción al absurdo", que es de frecuente aplicación en las demostraciones matemáticas. El razonamiento por reducción al absurdo se efectúa en la siguiente forma: se acepta como falsa la tesis y se demuestra que con esta suposición resulta la falsedad de la hipótesis (teorema contrarrecíproco). Pero por lo dicho anteriormente, el teorema contrarrecíproco es equivalente al directo, por lo cual éste queda de hecho demostrado.

Ejemplos:

TEOREMA DIRECTO.- Dos paralelas ***a*** y ***b*** cortadas por una transversal c forman con ella ángulos α y β alternos internos iguales:

H: $a \mathbin{//} b$
T: $\angle\alpha = \angle\beta$

TEOREMA RECÍPROCO.- Si dos rectas a y b cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos α y β iguales, son paralelas:

H: $\angle\alpha = \angle\beta$
T: $a \parallel b$

TEOREMA CONTRARIO.- Dos rectas no paralelas cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos desiguales:

H: $a \nparallel b$
T: $\angle\alpha \neq \angle\beta$

TEOREMA CONTRARRECÍPROCO.-

Si dos rectas cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos desiguales no son paralelas

H: $\angle\alpha \neq \angle\beta$
T: $a \nparallel b$

DEMOSTRACIÓN DEL RECÍPROCO (POR REDUCCIÓN AL ABSURDO).-

Supongamos que no se cumple T, es decir que $a \nparallel b$, y sea M el punto de intersección de b con c. Por el postulado de Euclides, por M podrá trazarse una paralela b' a a, la cual debe formar con c un ángulo β' alterno interno igual a α. Pero por hipótesis, $\angle\alpha = \angle\beta$, resulta que en un mismo semiplano había dos rectas distintas [que pasan por M y] que forman el mismo ángulo con otra dada, lo que es absurdo. El absurdo proviene de la suposición. Deja de ser absurdo si se verifica $a \parallel b$, que es lo que deseábamos demostrar.

La inducción completa o recurrencia.

Tiene importancia fundamental en la Aritmética, y por intermedio de ella en todas las ramas de las Matemáticas, el método de demostración llamado de ***inducción completa*** o de ***inducción matemática***, que consiste en lo siguiente: si se demuestra que una propiedad es válida para el número cero, y que la validez de la propiedad para 0 implica que vale también para el número 1, si además por análogo camino de la validez para 1, se deduce la validez para 2, de la de 2 se deduce la validez para 3, de la de 3 para 4, etc., habrá un camino para demostrar que la propiedad vale para cualquier número dado n.

Este procedimiento ha sido llamado también, con más propiedad, de ***razonamiento por recurrencia***, y según lo dicho, consta de dos partes: 1°) probar que la propiedad vale para 0; 2°) para cualquier n, que la propiedad valga [para] un número n implica que la propiedad vale para [el número] $n + 1$.

¿Quedaría con esto demostrado que la propiedad es válida para todos los números? Si el conjunto de los números naturales fuera finito sí, ya que conb un número finito de pasos se demostrarían todos los casos particulares posibles. Pero como el conjunto de los números es infinito, no es posible agotar todos los casos particulares, y la validez general de la propiedad debe aceptarse como axioma. Es el terreno de los cinco axiomas con que Peano fundamenta la Aritmética, y es conocido con el nombre de "principio de inducción completa", el cual puede enunciarse con precisión en la siguiente forma:

Si $n_0 \geq 0$ tiene una propiedad f, y si para cualquier $n \geq n_0$, de que n tenga la propiedad f, se deduce que $n + 1$ también tiene esa propiedad; eso implica que todos los números naturales tienen la propiedad f.

Ejemplo:

Demostrar que $1 + 3 + 5 + 7 + . . . + (2n - 1) = n^2$, $f(n)$ cualquiera sea n.

1er paso:

$f(1)$ (la propiedad vale para $n_0 = 1$)

en efecto:

$1 = 1^2$

2° paso:

suponiendo $f(x)$ demostrar $f(x + 1)$

H: $1 + 3 + 5 + . . . + (2x - 1) = x^2$, $f(x)$

Vamos a demostrar que

T: $1 + 3 + 5 + . . . + (2x - 1) + (2x + 1) = (x + 1)^2$, $f(x + 1)$

En efecto, sumando en la igualdad de la hipótesis $2x + 1$ en ambos miembros:

$1 + 3 + 5 + . . . + (2x - 1) + (2x + 1) = x^2 + 2x + 1$

pero el segundo miembro es $(x + 1)^2$,

luego:

$1 + 3 + 5 + . . . + (2x - 1) + (2x + 1) = (x + 1)^2$, $f(x + 1)$

es decir:

$f(1)$ y $f(x)$ implican $f(x + 1)$

de donde resulta por el principio de inducción completa la validez general de $f(n)$.

La importancia fundamental del método de recurrencia reside en que permite deducir de dos demostraciones verificables en el campo finito, una conclusión aplicable a una infinidad de casos particulares. Este paso es el que hace posible construir la aritmética y permite justificar la generalidad y poder de abstracción del simbolismo algebraico.

Poincaré atribuye al principio de inducción completa la importancia extraordinaria de llevar en sí el poder creador de la Matemática.

Respecto al término "inducción", él está usado en un sentido diferente al que se da a esta palabra en las ciencias naturales y debería aplicarse con más propiedad el nombre de "método inductivo", al que nosotros hemos llamado "método genético", ya que a él corresponden las características de la inducción: ir de un concepto o proposición [particular] a otro más general.

Extraído del Capítulo VI "Métodos de estructura y epistemología de la matemática" del libro "ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA", de Fausto I. Toranzos, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1975.
Algunas expresiones fueron modificadas mínimamente para corregir errores tipográficos del original o para facilitar la comprensión de alguna demostración (las palabras agregadas figuran entre paréntesis rectos []).

Responsables:
Prof. María del Rosario Quintans
Prof Alejandro Castro