*Lectura complementaria Nº 2.*

Los elementos de Euclides.

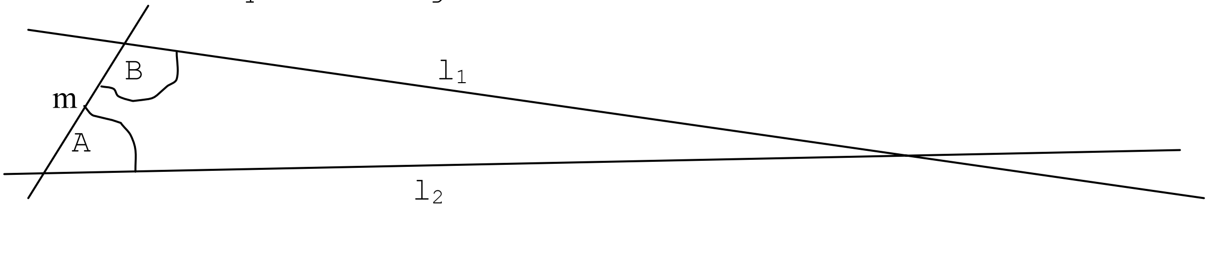
De todos los libros alguna vez escritos, de temas no religiosos, sin duda el más leído ha sido "Elementos" de Euclides. Escrito hacia el 300 AC, se ha mantenido como el libro de texto de geometría más exitoso de la historia. Incluso hoy en día algunos institutos secundarios lo siguen usando como referencia. Ciertamente, se le han hecho muchas correcciones pero, ¿qué libro de un autor individual ha tenido una circulación generalizada durante 2300 años? Claramente es el trabajo de un genio.

Primero observemos que los Elementos es justamente un libro de texto. No fue el primer libro de texto sobre geometría, se sabe que hubo otros antes. Simplemente, los Elementos mostró ser tan superior a sus predecesores que todos ellos desaparecieron y sus contenidos están hoy perdidos para nosotros. (Es malo. Hubiera sido bueno saber qué conocimientos había ***antes*** de Euclides).

Euclides, sin embargo, nunca pretendió con sus Elementos hacer un compendio de toda la geometría que se conocía en su tiempo. Algunos teoremas que se conocían en la época de Euclides no aparecen en sus Elementos. Se supone que el mismo Euclides escribió un libro sobre cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas) pero no las menciona en los Elementos. Euclides usó un total de diez axiomas divididos en cinco ***postulados*** y cinco ***nociones comunes***. La idea era que los postulados eran peculiares de la geometría, mientras que las nociones comunes eran válidas para toda la matemática. Hoy en día no haríamos tal distinción.

Los postulados, algunos de los cuales están expresados en forma modernizada, son éstos:

1) Una línea recta puede ser dibujada pasando por dos puntos cualesquiera,
2) Un segmento de recta puede ser construido en cualquier dirección a lo largo de una línea recta,
3) Un círculo puede ser dibujado siempre que estén dados el centro y el radio,
4) Todos los ángulos rectos son iguales entre sí,
5) Si dos líneas ($l_1$ y $l_2$ en la figura) son tales que una tercera línea (m) las intercepta de modo que la suma de los dos ángulos interiores (A y B) en un mismo semiplano de borde m es menor que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas, si se prolongan suficientemente, se cortarán en el mismo semiplano de borde m en el que la suma de los ángulos interiores es menor que dos ángulos rectos.



Las cinco nociones comunes son:

1) Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí,
2) Si cantidades iguales son sumadas a cantidades iguales las sumas son iguales,
3) Si cantidades iguales son restadas a cantidades iguales, las restas son iguales,
4) Las figuras que coinciden entre sí son iguales,
5) El todo es mayor que las partes.

La construcción de un edificio tan magnífico cobre la base de una cantidad tan reducida de axiomas es sin duda un logro del mayor orden. Es cierto que los axiomas no son suficientes, esto es, que Euclides usó mucho más de lo que creyó su intuición y los dibujos que realizó (un tema que discutiremos más adelante). Aun así, con los aditamentos necesarios, la estructura fundamental y el contenido de los Elementos han quedado incambiados.

El primer postulado asegura, no sólo la existencia de líneas rectas, sino que podemos disponer de todas las líneas rectas que necesitemos. Además, parece estar implicada la unicidad, es decir que, dados dos puntos, hay *una sola* línea que pasa por ellos. Euclides aceptó esto tácitamente.

El segundo postulado implica (aunque no lo afirma explícitamente) que dos líneas rectas distintas no pueden compartir un mismo segmento; esto es, que la línea recta que resulta de prolongar un segmento es única. Note, también, que esto parece implicar que el segmento puede ser prolongado tanto como queramos, sin límite de extensión. Otra vez Euclides asume esto en sus demostraciones.

El tercero es también un axioma de existencia. Nos provee de círculos de todos los tamaños en cualquier ubicación. Adicionalmente nos dice algo acerca del plano: desde que no hay limitaciones para el largo del radio, no puede haber limitación para el tamaño del plano en ninguna dirección. Note también, que no hay tampoco un radio mínimo, lo que le da un cierto tipo de continuidad al plano; es decir que el plano no puede ser un conjunto discreto de puntos separados por una distancia mínima.

El postulado cuarto no es tan simple como parece. Nos afirma que no importa dónde tracemos un ángulo recto en el plano, siempre tiene el mismo tamaño. Luego, el ángulo recto sirve como una especie de medida invariante. Sin este postulado podría haber distorsión de los ángulos rectos al moverlos de lugar en el plano, como esos espejos que deforman las imágenes de los objetos que reflejan. Además, sin este postulado, el siguiente sería incomprensible.

El quinto postulado es la obra de un genio, y diferiremos su discusión para más adelante. De las nociones comunes no cabe duda que todas –excepto quizás la número cuatro- son familiares para todos. Observe que no estamos afirmando que son verdaderas o que se puede demostrar que son verdaderas, sólo decimos que efectivamente están de acuerdo con nuestra experiencia cotidiana. Hay estructuras matemáticas en las que la quinta noción diría que el todo no es ***menor*** que las partes.

La cuarta noción común es un poco más complicada que las otras. En parte es una definición de igualdad (o congruencia). También lo usó Euclides para justificar el principio de superposición, principio que le permitió "mover" figuras en el plano sin cambiar su forma ni su tamaño. Por cierto, no lo usó muy seguido (tal vez pensó que era poco elegante) pero es fundamental para la totalidad de su obra desde que es usado para demostrar la proposición 4 del libro I, el famoso teorema lado-ángulo-lado sobre congruencia de triángulos. Probablemente debería estar junto con los postulados ya que su naturaleza es específicamente geométrica.

Ejercicios.

1. Para los griegos, un axioma era una "verdad evidente por sí misma". ¿Qué tiene de evidente por sí mismo el postulado cinco?
2. ¿Sería deseable agregar un sexto postulado que dijera "Dos líneas rectas no pueden encerrar una región del plano"? ¿Por qué? (o ¿por qué no?)
3. Sobre la base de estos axiomas únicamente, ¿puedes decir cuándo un punto se encuentra entre otros dos puntos dados? (Pista: esta cuestión no es tan inocente como parece)
4. Los elementos básicos de los elementos de Euclides surgen de su experiencia visual. Suponga que una especie de peces inteligentes ha desarrollado una geometría.
   (a) ¿Cuáles sería los objetos básicos de dicha geometría?
   (b) ¿Puedes imaginar algunos axiomas de esa geometría acuática?
   (c) ¿Tendría el movimiento, por ejemplo, un papel muy importante en esa geometría? Explique y contraste con los elementos de Euclides.

El quinto postulado: tierraplana.

Aún para el lector más distraído, el quinto postulado tiene un aspecto muy diferente al de los otros cuatro. Los otros son simples sentencias, fáciles de enunciar y, al menos superficialmente, de interpretar. El quinto, en cambio, tiene un enunciado complicado y es difícil interpretarlo sin hacer un diagrama.

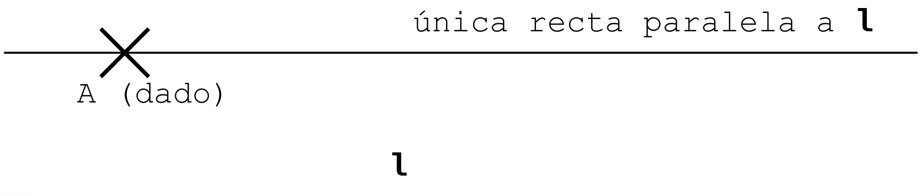
Esta complejidad resultó muy perturbadora, no sólo para los matemáticos griegos, sino para los posteriores. Había una fuerte sensación de que no se trataba realmente de un axioma sino de un teorema que podía ser demostrado a partir de los otros nueve axiomas. Por más de dos mil años fue el "escándalo de la matemática" que nadie hubiera podido hacer tal demostración. Hubo muchos intentos, algunos acometidos por matemáticos del mayor calibre, pero ninguno logró probarlo haciendo uso ***únicamente*** de los otros nueve axiomas. Estos esfuerzos culminaron a principios del siglo diecinueve, cuando tres matemáticos trabajando independientemente mostraron que tal prueba era imposible. ¡Tan grande era el genio de Euclides que había visto esto dos mil años antes!

Las falsas demostraciones del quinto postulado que se habían presentado no eran, en general, inválidas en el sentido usual. Ellas fallaron porque contenían alguna afirmación que no se encontraba entre los otros nueve axiomas de Euclides y que era enteramente equivalente al quinto postulado.

Este concepto de equivalente merece una mayor explicación. Diremos que dos conjuntos de axiomas son equivalentes si esencialmente la misma colección de teoremas puede ser demostrada usando un conjunto o el otro. En nuestro caso, dejaremos todos los axiomas fijos menos el quinto, al que sustituiremos por otro. Supongamos ahora que **P** es un teorema que se puede probar usando los diez axiomas usuales de Euclides, y supongamos también que lo que afirma el quinto postulado puede ser ahora demostrado usando los nueve axiomas y **P**. Entonces, los dos conjuntos se dicen equivalentes. Esto es, toda demostración que requería que se usara el quinto postulado, ahora se hará usando **P** en lugar de aquél. También diremos que **P** es equivalente al quinto postulado.

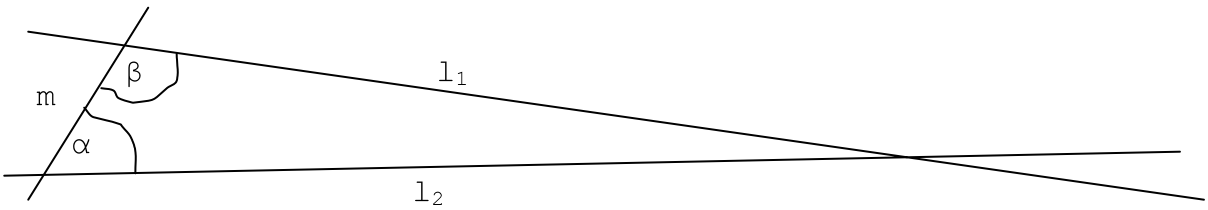
Hay muchos enunciados que son equivalentes al quinto postulado. Esto ocurre porque se trata del axioma que nos permite expresar la propiedad que describe el carácter "no curvado" del plano, y hay muchas maneras de hacerlo.

El enunciado equivalente más usado es llamado axioma de Playfair: "sea **l** una línea recta y **A** un punto que no pertenece a ella, entonces existe una sola línea recta paralela a **l** que pasa por **A**".



Este es probablemente el postulado que aprendió en el bachillerato, y aunque es más fácil de interpretar que el de Euclides, es sin embargo inferior a éste en tanto axioma. ¿Cómo podemos verificarlo? En esencia, nos dice que algo no ocurre. Recuerde que dos líneas son paralelas si no se cortan. Ahora, puesto que las líneas rectas pueden ser prolongadas indefinidamente, ¿cómo podemos estar seguros de que dos líneas en particular no se van a cortar más allá del lugar hasta el que revisemos? Si no podemos determinar experimentalmente si dos líneas rectas son paralelas, ¡cuánto más difícil será establecer que esa paralela es única!

El postulado de Euclides, por otro lado, puede ser verificado inductivamente de modo más fácil. Todo lo que hay que hacer es medir los ángulos $\alpha$ y $\beta$, y si su suma es menor que 180°, comprobar que $l_1$ y $l_2$ se cortan en un semiplano de borde m. Si la suma no es muy cercana a 180° no habrá problema para hacerlo. Las dificultades sólo aparecen cuando la suma está muy próxima a 180°.




Otro enunciado equivalente es el que afirma que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, o aún más sorprendentemente, que hay por lo menos *un* triángulo cuyos ángulos interiores suman 180°. Observe que esto significa que si hay al menos un triángulo que cumple esta propiedad, entonces todos la cumplen.

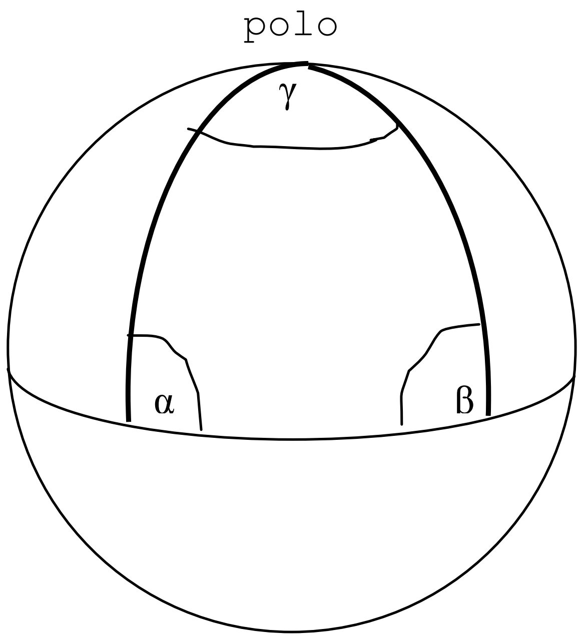
Esta es una lista de proposiciones equivalentes al quinto postulado:

1) Existen triángulos semejantes que no son congruentes; esto es, existen dos triángulos con sus ángulos respectivamente iguales pero que no son congruentes.
2) El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos (teorema de Pitágoras).
3) Si una recta interseca a una de dos rectas paralelas, interseca a la otra (siendo las tres rectas coplanares)-
4) Dos paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.
5) Si una circunferencia contiene a tres puntos, éstos no están alineados.

6) Si *k* es un entero positivo, existe un triángulo cuya área es mayor que *k*.

Repetimos que cualquiera de las proposiciones anteriores, puestas como axiomas en lugar del quinto postulado, nos permite demostrar la misma colección de teoremas. Como el quinto postulado caracteriza al plano como una superficie sin curvatura, lo mismo deben hacer las otras proposiciones. Por lo tanto, cualquiera de ellas nos sirve para representar un mundo no curvo.

A modo de ilustración, consideremos una geometría construida sobre la superficie de una esfera, como una Tierra idealizada. Tomamos como nuestros nueve axiomas a los de Euclides, modificando el segundo para permitir que las rectas no se puedan prolongar indefinidamente (en esta geometría las rectas vienen a ser circunferencias de radio máximo).

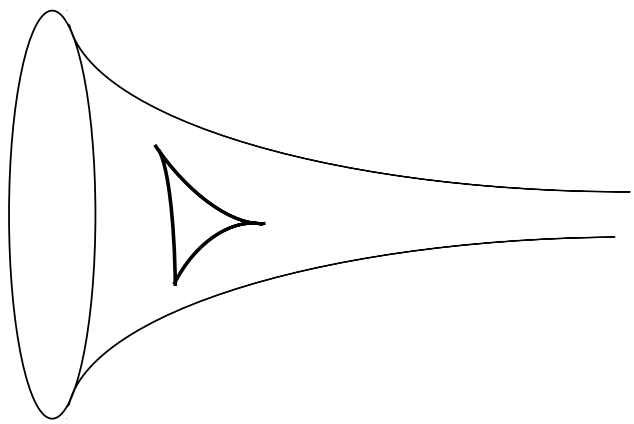



Supongamos ahora que tenemos un triángulo con un lado contenido en el ecuador y los otros dos en meridianos que se cortan en uno de los polos. Los ángulos α y β miden 90°, mientras que el ángulo γ puede tomar cualquier valor comprendido entre 0° y 360°. Luego, en una esfera podemos construir triángulos cuyos ángulos sumen cualquier valor comprendido entre 180° y 540° (excluyendo los valores extremos).

Sabemos ahora que ningún triángulo puede tener ángulos que sumen 180° porque en ese caso todos los triángulos cumplirían esa relación. Más aún, podemos mostrar que todos los triángulos tienen ángulos que suman ***más*** de 180°. Esta circunstancia expresa la convexidad de la esfera. También sabemos, en virtud del principio de equivalencia de los axiomas, que ninguna de las proposiciones sobre paralelas tiene validez aquí pues en esta geometría no hay rectas paralelas. Las circunferencias que no se cortan no se incluyen dentro de las rectas de la geometría esférica.

Por otro lado, supongamos que vivimos en una superficie cóncava, por ejemplo en el exterior de la campana de una trompeta. Los matemáticos han llamado ***pseudoesfera*** a la idealización de esta superficie.

Aquí podemos tomar los nueve axiomas de Euclides sin cambios, pero ¿qué ocurre con el quinto postulado?



Consideremos un triángulo en la pseudoesfera. No es difícil convencerse de que en este caso la suma de los ángulos es menor que 180° y por lo tanto ocurre lo mismo con todos los triángulos. Entonces, en la pseudoesfera tanto como en la esfera, el quinto postulado no es válido.

El axioma análogo al de Playfair se enunciaría de este modo: "Sean una recta **l** y un punto **A** que no pertenece a ella, entonces existen por lo menos dos líneas paralelas a **l** por **A**". Por supuesto que en la figura las dos líneas no se ven paralelas, pero esto obedece a que la página de este libro es como un plano sin curvatura, en el que hay sólo una paralela por **P**.

Ejercicios.

1. Busque en el diccionario la palabra *plano*. Compruebe la circularidad de la definición. ¿Es un buen concepto primitivo? ¿Puede usted mejorar la definición usando sus propias palabras?
2. ¿Puede usted hacer un dibujo para comprobar inductivamente que dos rectas son paralelas?
3. Tal vez usted pueda encontrar un método para verificar inductivamente el axioma de Playfair. Revíselo para constatar si ha aceptado implícitamente algún supuesto, o no.
4. En relación al axioma de Playfair, suponga que vivimos en un universo esférico (como si fuera una naranja gigantesca).
   (a) ¿Cómo se ve un plano en ese universo? (Pista: ¿qué ocurre cuando pelamos una naranja?)
   (b) ¿Se cumple el axioma de Playfair?
5. Euclides probó que las líneas paralelas no se cortan. Comente.
6. Otro enunciado equivalente al quinto postulado es "El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo mide la mitad del tercer lado". Pruebe que esto implica alguna de las alternativas listadas en el texto.

Extraido de **Mathematics** *An Appreciation*, de Michael Bernkopf, Houghton Mifflin Company – Boston, 1975.