

Capítulo III.

Isometrías.

Definición: llamamos *distancia entre dos puntos* al segmento de recta que los tiene por extremos. La medida de dicho segmento también se llama distancia y es un número real que cumple:

- 1) $A \neq B \Leftrightarrow d(A, B) > 0$
- 2) $A = B \Leftrightarrow d(A, B) = 0$ (en este caso tenemos un *segmento nulo*)
- 3) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ (*propiedad triangular, ya demostrada*).
- 4) $d(A, B) = d(B, A)$.

Definición: llamamos *isometría* a una función sobreyectiva del plano en el plano que conserva las distancias.

Términos sinónimos son: movimiento, congruencia y transformación.

$$f \text{ es isometría} \Leftrightarrow f : \pi \rightarrow \pi \left\{ \begin{array}{l} d(A, B) = d(f(A), f(B)) \forall A, \forall B \in \pi \\ f \text{ sobreyectiva} \end{array} \right.$$

Teorema: una *isometría es una función biyectiva*.

Dem.: recordemos que una función es biyectiva si es sobreyectiva e inyectiva. Como por definición una isometría es sobreyectiva, alcanza con probar que también es inyectiva. Para esto, probaremos que las imágenes de puntos distintos deben ser necesariamente distintas:

$$A \neq B \overset{\substack{\text{prop} \\ (1)}}{\Rightarrow} d(A, B) > 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{def} \\ \text{isometría} \\ f \text{ isometría} \end{array} \right. \Rightarrow d(f(A), f(B)) > 0 \Rightarrow f(A) \neq f(B) .$$

Observaciones.

1) Definimos una función Id (que llamaremos identidad) tal que $Id(A) = A \forall A$, que cumple:

a) Id es sobreyectiva (porque todo punto A tiene preimagen, que es él mismo)

b) $d(A, B) = d(\underbrace{Id(A)}_A, \underbrace{Id(B)}_B)$.

Entonces Id es una isometría.

2) Por ser una isometría una función biyectiva queda garantizada la existencia de la inversa, que también es una isometría.

$$f \text{ isometría} \Rightarrow \exists f^{-1} \text{ isometría} / f^{-1}(f(A)) = A \forall A.$$

3) El producto de dos isometrías (es decir, la función que consiste en aplicar sucesivamente dos isometrías) es otra isometría.

$$\left. \begin{array}{l} d(A, B) = d(f(A), f(B)) \\ d(g(f(A)), g(f(B))) = d(f(A), f(B)) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, B) = d(g(f(A)), g(f(B)))$$

de donde concluimos que $f \cdot g$ conserva las distancias.

Definición: decimos que dos figuras son *congruentes* si existe una isometría que las hace corresponder.

Llamamos *congruencia* (o *igualdad geométrica*) a la relación entre figuras congruentes.

Sean F y G dos figuras: $F \underset{c}{=} G \Leftrightarrow \exists f \text{ isometría} / f(F) = G$.

El símbolo que utilizamos para indicar la congruencia ($\underset{c}{=}$) no coincide con el que usamos para señalar la igualdad ($=$). En efecto, observemos que F y G no son la misma figura (pues son dos conjuntos de puntos que no tienen por qué coincidir) pero $f(F)$ y G sí son la misma figura (pues se trata del mismo conjunto de puntos). Intuitivamente, la congruencia nos dice que dos figuras tienen la misma "forma" y el mismo "tamaño", aunque no tengan todos sus puntos en común.

Teorema: la congruencia es una relación de equivalencia.

Demostración.

1) La congruencia cumple la propiedad de identidad: $F \underset{c}{=} F$.

Dem.: existe la isometría Id tal que $Id(A) = A \forall A \in F \Rightarrow Id(F) = F$.

2) La congruencia cumple la propiedad recíproca: $F \underset{c}{=} G \Rightarrow G \underset{c}{=} F$.

Dem.: $F \underset{c}{=} G \Leftrightarrow \exists f \text{ isometría} / f(F) = G \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists f^{-1} \text{ isometría inversa de } f / f^{-1}(f(A)) = A \forall f(A) \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(G) = F \Rightarrow$

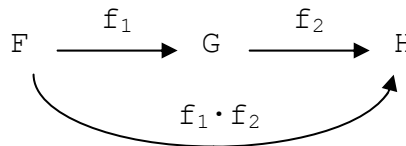
$\Rightarrow G \underset{c}{=} F$.

3) La congruencia cumple la propiedad transitiva: $\left. \begin{matrix} F \underset{c}{=} G \\ G \underset{c}{=} H \end{matrix} \right\} \Rightarrow F \underset{c}{=} H$.

Dem.:

$F \underset{c}{=} G \Leftrightarrow \exists f_1 \text{ isometría} / f_1(F) = G$

$G \underset{c}{=} H \Leftrightarrow \exists f_2 \text{ isometría} / f_2(G) = H$

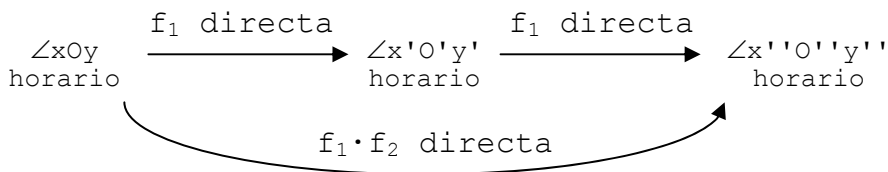


Entonces, $f_1 \cdot f_2$ es una isometría / $f_1 \cdot f_2(F) = H \Leftrightarrow F \underset{c}{=} H$.

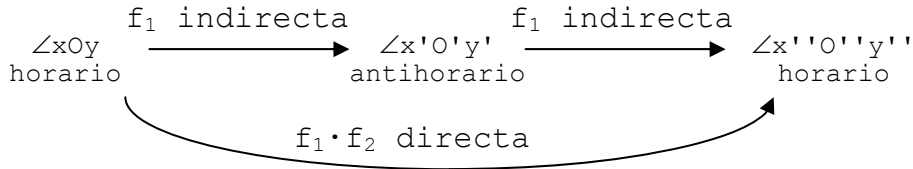
Definición: llamamos *isometría directa* a la que conserva el sentido del plano, esto es, que transforma ángulos horarios en ángulos horarios. Llamamos *isometría indirecta* a la que no conserva el sentido del plano.

Observaciones:

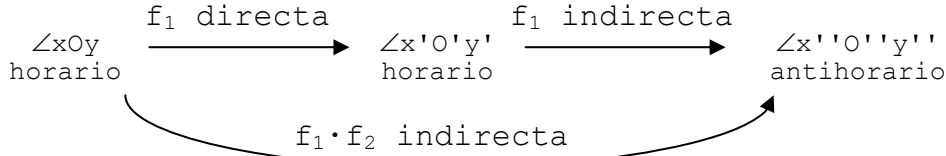
1) El producto de dos isometrías directas es una isometría directa:



2) El producto de dos isometrías indirectas es una isometría directa:



3) El producto de una isometría directa por una isometría indirecta es una isometría indirecta:



Definición: llamamos *punto unido* al que se corresponde consigo mismo en una isometría.

$$A \text{ es unido} \Leftrightarrow f(A) = A.$$

Caracterización de isometrías. Primera parte.

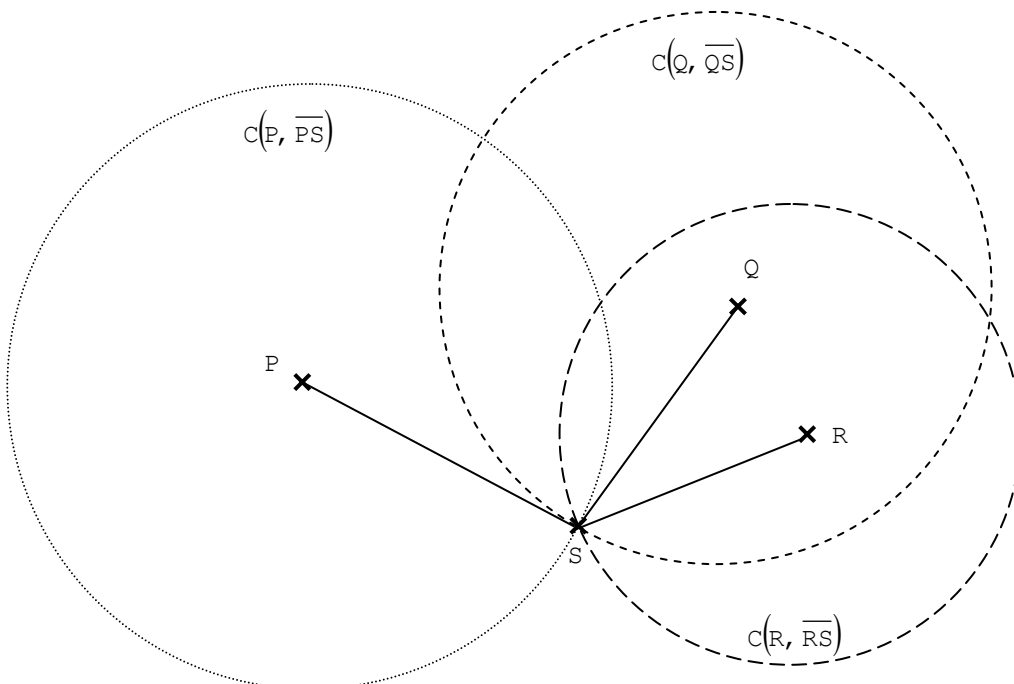
Nos interesa ahora investigar cuántos tipos distintos de isometrías existen, y qué propiedades las caracterizan. En esta primera parte de nuestra investigación, nos tomaremos tres puntos no alineados y sus correspondientes imágenes, y estudiaremos separadamente los casos en que alguno de estos puntos es unido.

Primer caso: los tres puntos son unidos.

Dada una isometría f y tres puntos no alineados P, Q y R / $f(P) = P, f(Q) = Q$ y $f(R) = R$, halle la imagen de un cuarto punto S no coincidente con ninguno de ellos.

$$\left. \begin{aligned} f \text{ es isometría} &\Rightarrow d(P, S) = d(f(P), f(S)) \stackrel{f(P)=P}{=} d(P, f(S)) \Rightarrow f(S) \in C(P, \overline{PS}) \\ f \text{ es isometría} &\Rightarrow d(Q, S) = d(f(Q), f(S)) \stackrel{f(Q)=Q}{=} d(Q, f(S)) \Rightarrow f(S) \in C(Q, \overline{QS}) \\ f \text{ es isometría} &\Rightarrow d(R, S) = d(f(R), f(S)) \stackrel{f(R)=R}{=} d(R, f(S)) \Rightarrow f(S) \in C(R, \overline{RS}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(S) \in C(P, \overline{PS}) \cap C(Q, \overline{QS}) \cap C(R, \overline{RS}) = \{S\}$$



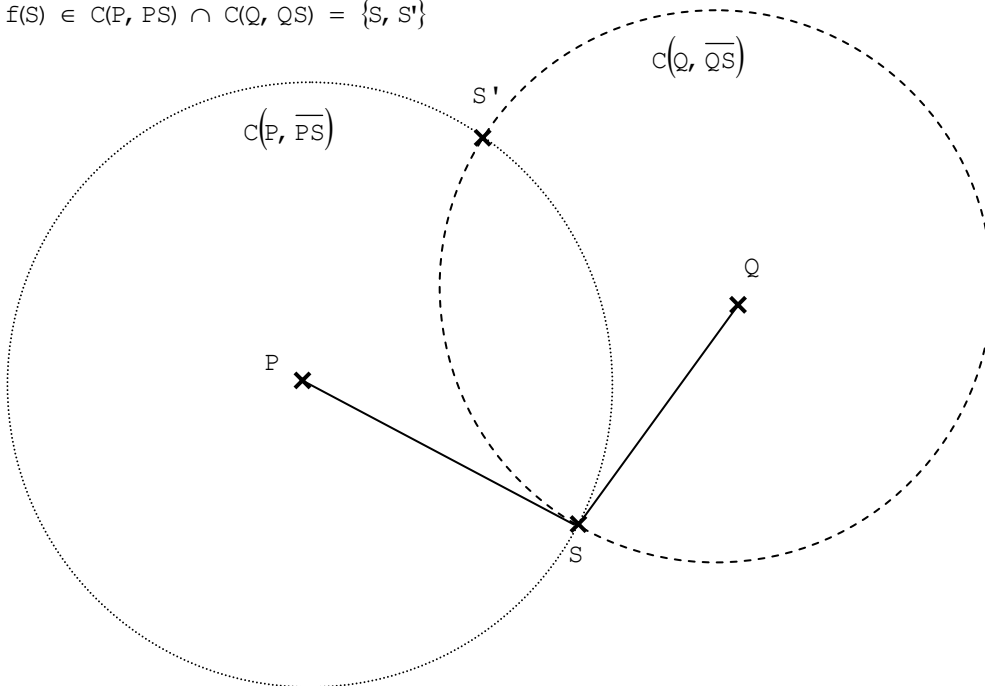
Concluimos que el cuarto punto es unido también. Esto significa que si tres puntos no alineados son unidos, entonces todos los puntos del plano son unidos. La isometría en la que todos los puntos son unidos es la identidad, definida anteriormente: $f = \text{Id}$. Observamos que Id es una isometría DIRECTA pues transforma ángulos horarios en ángulos horarios.

Segundo caso: dos puntos son unidos y el tercero, no.

Dada una isometría f y dos puntos distintos P y Q tales que $f(P) = P$ y $f(Q) = Q$, halle la imagen de un tercer punto S no alineado con ellos.

$$\left. \begin{aligned} f \text{ es isometría} &\Rightarrow d(P, S) = d(f(P), f(S)) \stackrel{f(P)=P}{=} d(P, f(S)) \Rightarrow f(S) \in C(P, \overline{PS}) \\ f \text{ es isometría} &\Rightarrow d(Q, S) = d(f(Q), f(S)) \stackrel{f(Q)=Q}{=} d(Q, f(S)) \Rightarrow f(S) \in C(Q, \overline{QS}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(S) \in C(P, \overline{PS}) \cap C(Q, \overline{QS}) = \{S, S'\}$$

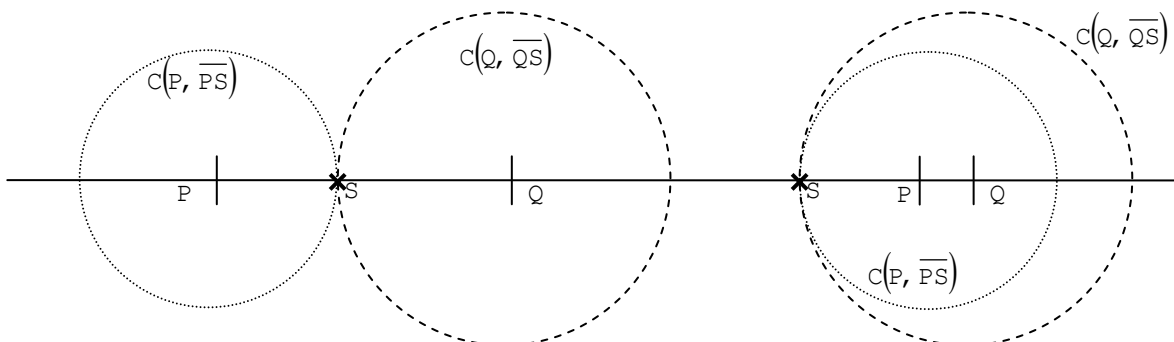


Si $f(S) = S$, $f = \text{Id}$ según el ejercicio anterior.

Si $f(S) = S'$, como $d(Q, S') = d(Q, S) \Rightarrow Q \in \text{mz}SS'$.
 Análogamente, $d(P, S') = d(P, S) \Rightarrow P \in \text{mz}SS'$.
 Entonces, $PQ = \text{mz}SS'$.

Definimos SIMETRÍA AXIAL DE EJE PQ a la isometría S_{PQ} / PQ es mediatriz de todo segmento de puntos distintos correspondientes.

Propiedad (i): los puntos del eje PQ son unidos.



En efecto, si tomamos $S \in PQ$ resulta $f(S) \in C(P, \overline{PS}) \cap C(Q, \overline{QS}) = \{S\}$, pues $C(P, \overline{PS})$ y $C(Q, \overline{QS})$ son circunferencias tangentes.

Propiedad (ii): el eje PQ corta a todo segmento SS' de puntos correspondientes en su punto medio.

Es inmediato por ser $PQ = mzSS'$.

Propiedad (iii): $\angle SPQ = \angle S'PQ$.

Como el triángulo SPS' es isósceles, $mzSS'$ contiene a $bzSPS'$.

Observamos que la simetría axial es INDIRECTA.

Tercer caso: un punto es unido, y los otros dos, no.

Dada una isometría f y un punto $P / f(P) = P$, halle la imagen de un punto S . Si $\exists Q / Q = f(Q)$, f es la identidad o una simetría axial de eje PQ .

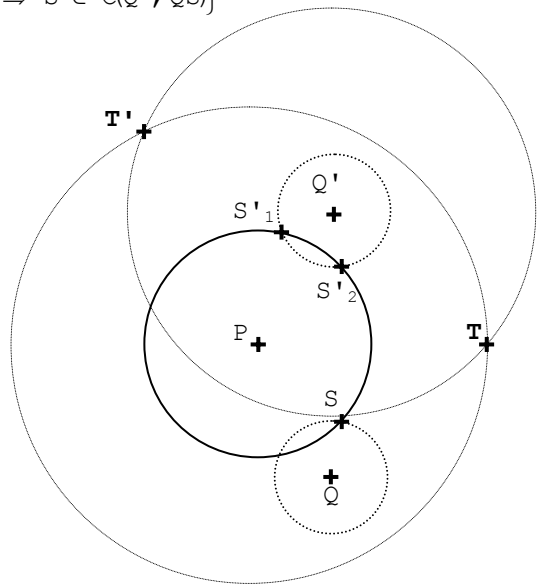
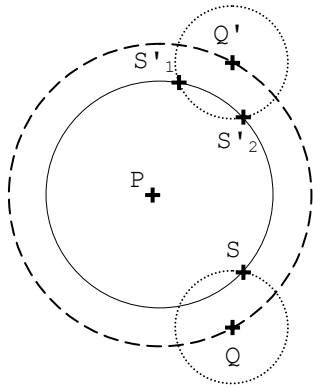
En caso contrario ($f(X) \neq X \forall X \neq P$), sea $Q' = f(Q) / Q' \in C(P, \overline{PQ})$.

$$f \text{ es isometría} \Rightarrow d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \stackrel{f(P)=P}{=} d(P, Q') \Rightarrow Q' \in C(P, \overline{PQ})$$

$$f \text{ es isometría} \Rightarrow d(P, S) = d(f(P), f(S)) \stackrel{f(P)=P}{=} d(P, S') \Rightarrow S' \in C(P, \overline{PS})$$

$$f \text{ es isometría} \Rightarrow d(Q, S) = d(f(Q), f(S)) \stackrel{f(Q)=Q'}{=} d(Q', S') \Rightarrow S' \in C(Q', \overline{QS})$$

$$\Rightarrow S' \in C(P, \overline{PQ}) \cap C(Q', \overline{QS}) = \{S'_1, S'_2\}$$



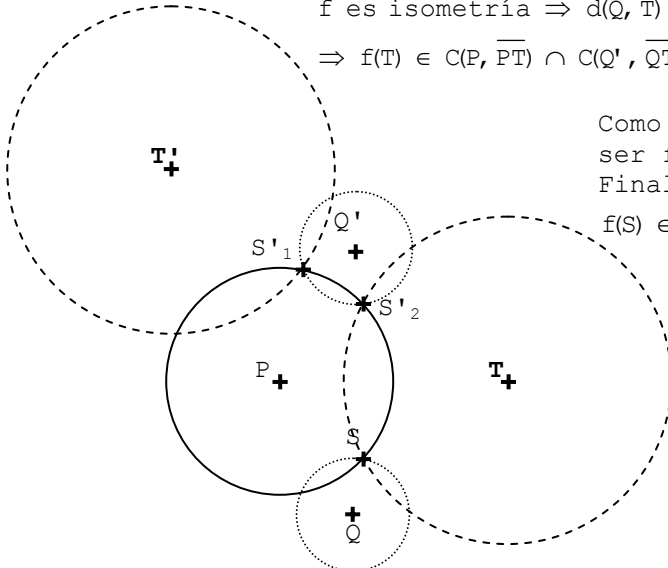
Para descartar una de las soluciones, tomaremos un "punto testigo" T que pertenezca a la mediatriz del segmento QQ' .

Sea $T \in mzQQ'$.

$$f \text{ es isometría} \Rightarrow d(P, T) = d(f(P), f(T)) \stackrel{f(P)=P}{=} d(P, f(T)) \Rightarrow f(T) \in C(P, \overline{PT})$$

$$f \text{ es isometría} \Rightarrow d(Q, T) = d(f(Q), f(T)) \stackrel{f(Q)=Q'}{=} d(Q', f(T)) \Rightarrow f(T) \in C(Q', \overline{QT})$$

$$\Rightarrow f(T) \in C(P, \overline{PT}) \cap C(Q', \overline{QT}) = \{T, T'\}$$



Como P es el único punto unido, no puede ser $f(T) = T$, de modo que es $f(T) = T'$. Finalmente, tenemos que

$$f(S) \in C(P, \overline{PS}) \cap C(Q', \overline{QS}) \cap C(T', \overline{TS}) = \{S'\}.$$

Propiedad (i): $\angle QPQ' = \angle SPS' = \alpha$ (ángulo constante).

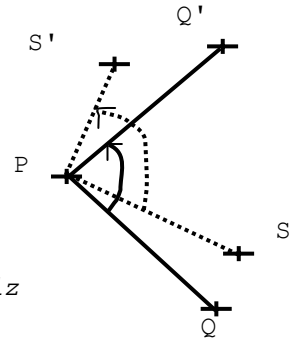
Dem: $\triangle QPS = \triangle Q'PS'$ por criterio LLL.

Además, $\angle QPQ' = \angle QPS + \angle SPQ' = \angle SPQ' + \angle Q'PS' = \angle SPS'$.

Def.: a esta isometría la llamamos ROTACIÓN (o GIRO)

DE CENTRO P Y ÁNGULO α ($=\angle SPS'$).

El ángulo α debe estar orientado.



Propiedad (ii): el centro de rotación pertenece a la mediatriz de todo segmento de extremos correspondientes.

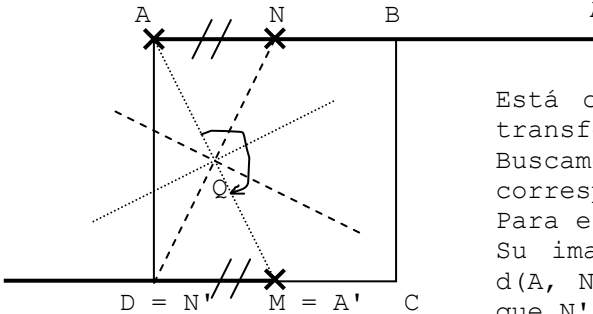
Como $d(P, S) = d(P, S')$, $P \in mzSS'$.

Propiedad (iii): el centro de rotación pertenece al $Ac(SS', \alpha)$.

Es una consecuencia de la propiedad (i).

Propiedad (iv) La rotación es una isometría directa.

Ejercicio: hallar el centro Q y el ángulo α de la rotación que transforma la semirrecta AB en la semirrecta MD, siendo ABCD un cuadrado horario y $M = p.m.CD$.

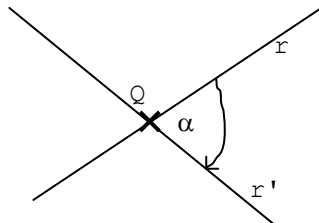


Está claro que el origen de la semirrecta AB se transforma en el origen de la semirrecta MD. Buscamos hallar otro par de puntos correspondientes. Para ello, consideramos $N = p.m.AB$. Su imagen N' es un punto de la semirrecta MD / $d(A, N) = d(M, N') = 1/2d(A, B)$, de donde resulta que $N' = D$.

Al intersectar las mediatrices de los segmentos AM Y ND obtenemos el centro Q de la rotación, que es el p.m.ND. Vemos que el ángulo α es un llano, y está orientado en forma horaria. Por lo tanto, la isometría es $R(Q, 180^\circ \text{ horario})$.

Podemos escribir esto de la siguiente manera:

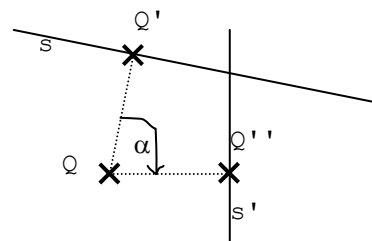
$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{R(Q, \alpha)} M \\ N \xrightarrow{R(Q, \alpha)} D \end{array} \right\} \Rightarrow \{Q\} = mzAM \cap mzND = p.m.ND, \alpha = \angle AQM = 180^\circ \text{ horario}$$



Ejercicio: hallar la imagen de una recta en $R(Q, \vec{\alpha})$ (ángulo α horario).

Si la recta r pasa por Q, simplemente formamos el ángulo α orientado y hallamos r'.

Si la recta s no pasa por Q, hallamos la proyección Q' de Q sobre s; ahora tenemos que la recta QQ' pasa por Q, hallamos su imagen QQ'' y trazamos la recta s' perpendicular a QQ'' por Q''.



Observación: de la figura podemos concluir que dos rectas correspondientes forman un ángulo suplementario al de la rotación, y que Q pertenece a la bisectriz de dicho ángulo.

Caracterización de isometrías. Segunda parte.

Ej. Se dan un eje e y un triángulo ABC .

a) Hallar $S_e(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$.

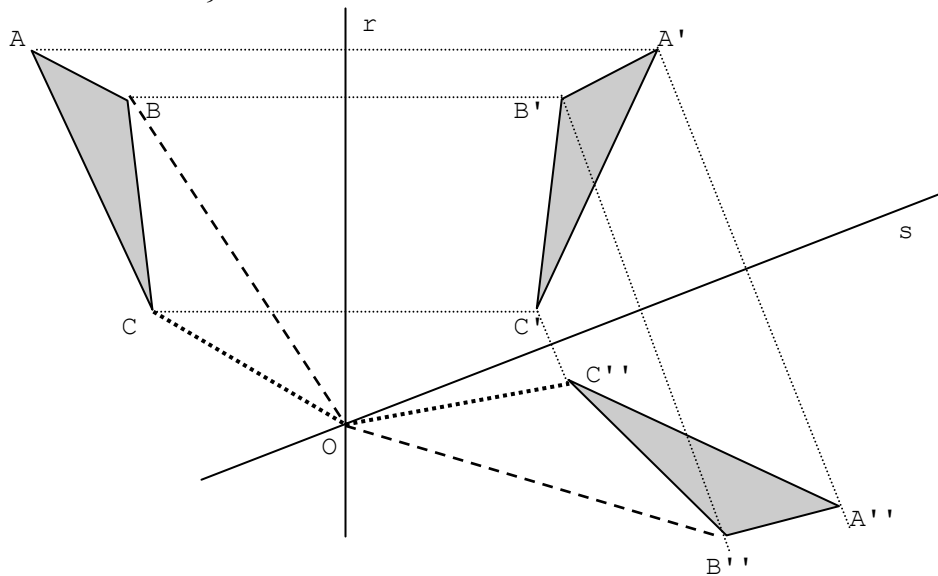
b) Hallar $S_e \cdot S_e(\Delta ABC)$.

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{S_e} A' \xrightarrow{S_e} A'' = A \\ B \xrightarrow{S_e} B' \xrightarrow{S_e} B'' = B \\ C \xrightarrow{S_e} C' \xrightarrow{S_e} C'' = C \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \xrightarrow{S_e \cdot S_e} \Delta ABC$$

Concluimos que $S_e \cdot S_e = \text{Id}$. Se dice que la simetría axial es **involutiva**.

c) Sean ahora $r \cap s = \{O\}$, $\angle rOs = \alpha$ (orientado, digamos, horario).

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{S_r} A' \xrightarrow{S_s} A'' \\ B \xrightarrow{S_r} B' \xrightarrow{S_s} B'' \\ C \xrightarrow{S_r} C' \xrightarrow{S_s} C'' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \xrightarrow{S_r \cdot S_s} \Delta A''B''C''$$



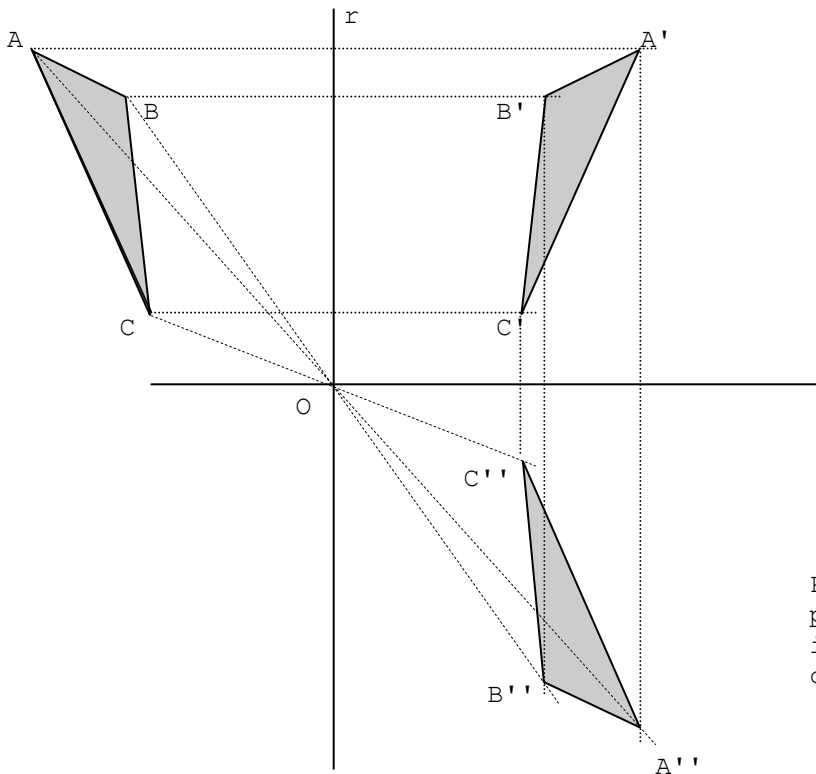
Observamos que $\angle COC'' = \angle BOB'' = \angle AOA'' = 2\alpha$, lo que nos permite concluir que $S_r \cdot S_s = R(O, 2\alpha \text{ horario})$.

Podemos generalizar que "el producto de dos simetrías axiales de ejes secantes es una rotación cuyo centro es el punto de intersección y el ángulo de rotación es el doble del ángulo que forman los ejes, en el sentido del primer eje al segundo".

Recíprocamente, "toda rotación se puede descomponer en el producto de dos simetrías axiales de ejes que se cortan en el centro de rotación, siendo el ángulo que forman los ejes igual a la mitad del ángulo de rotación, y el sentido de la rotación es el que lleva el primer eje al segundo".

Un importante caso particular es el de ejes perpendiculares. Se obtiene entonces una rotación con un ángulo de 180° . Llamamos a este producto SIMETRÍA CENTRAL DE CENTRO O .

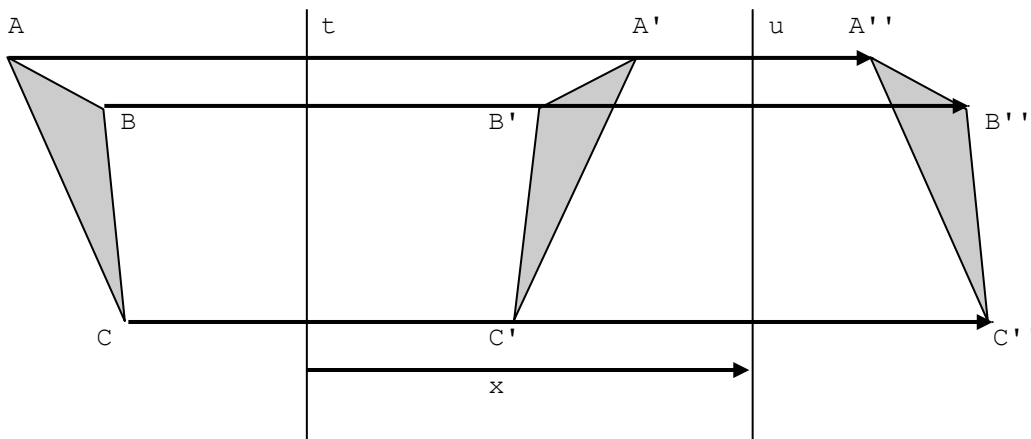
Propiedad 1: el centro de la simetría central es punto medio de todo segmento de extremos correspondientes.



Propiedad 2: por ser el producto de dos isometrías indirectas, la simetría central es directa.

d) Sean ahora $t \parallel u$, $d(t, u) = x$ (ejes paralelos tales que la distancia entre ellos es x).

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{s_t} A' \xrightarrow{s_u} A'' \\ B \xrightarrow{s_t} B' \xrightarrow{s_u} B'' \\ C \xrightarrow{s_t} C' \xrightarrow{s_u} C'' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \xrightarrow{s_t \cdot s_u} \Delta A''B''C''$$



Observamos que todos los segmentos de extremos correspondientes: AA'' , BB'' y CC'' tienen la misma dirección, y sentido, y el mismo módulo $2x$. Esto quiere decir que son vectores equipolentes. Cualquier vector con la misma dirección, sentido y módulo se puede tomar como representante de ellos.

Sea $\vec{V} = AA''$. A este producto lo llamamos TRASLACIÓN DE VECTOR \vec{V} .

"Todo producto de simetrías axiales de ejes paralelos es equivalente a una traslación cuyo vector es perpendicular a los ejes, su módulo es el doble de la distancia entre los ejes, y su dirección es la que lleva del primer eje al segundo".

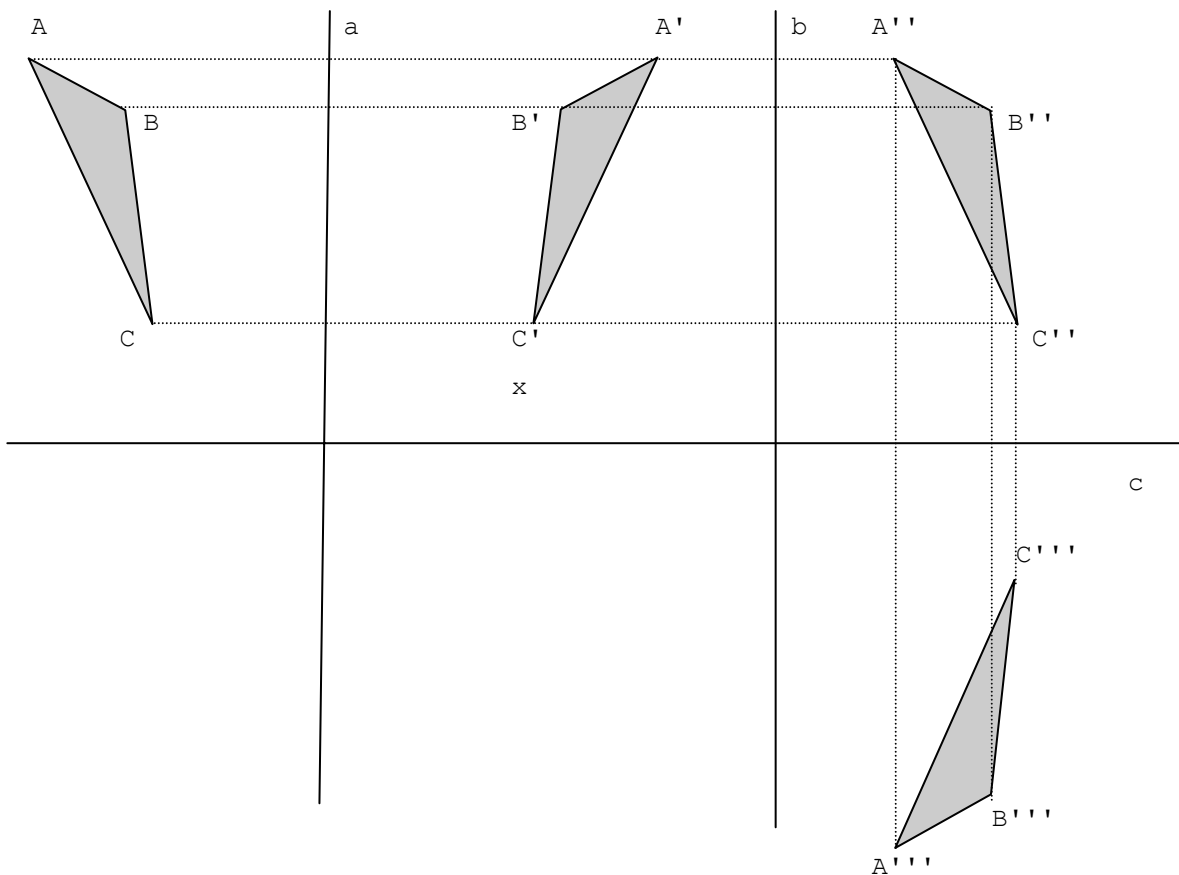
También: "toda traslación se puede descomponer de infinitas maneras distintas en el producto de dos simetrías axiales de ejes paralelos, perpendiculares al vector de traslación y cuya distancia es la mitad del módulo del vector de traslación".

Propiedad 1: la traslación no tiene puntos unidos.

Propiedad 2: la traslación es un movimiento directo.

e) Sean ahora tres ejes a, b, c tales que $a \parallel b$ y $a \perp c$.

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{s_a} A' \xrightarrow{s_b} A'' \xrightarrow{s_c} A''' \\ B \xrightarrow{s_a} B' \xrightarrow{s_b} B'' \xrightarrow{s_c} B''' \\ C \xrightarrow{s_a} C' \xrightarrow{s_b} C'' \xrightarrow{s_c} C''' \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \xrightarrow{s_a \cdot s_b \cdot s_c} \Delta A''' B''' C'''$$



Si $d(a, b) = x$, sea \vec{V} un vector de módulo $2x$ y dirección paralela a c .

El producto de estas tres simetrías axiales se llama ANTITRASLACIÓN DE VECTOR \vec{v} Y EJE c y se anota $At(\vec{V}, c)$.

Propiedad 1: la antitraslación no tiene puntos unidos.

Propiedad 2: la antitraslación es un movimiento indirecto.

Propiedad 3: el eje de simetría contiene al punto medio de todo segmento de extremos correspondientes.

Ejercicio: indique las respectivas isometrías inversas:

- a) Id , b) S_e , c) C_0 , d) $R(O, \alpha \text{ horario})$, e) $T_{\vec{v}}$, f) $At(\vec{V}, e)$.