

Capítulo II.

Lugar geométrico.

Definición: un *lugar geométrico plano* es el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen una determinada propiedad.

Ejemplo: la mediatriz de un segmento es el conjunto de todos los puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento (esto se probó en el ej. 4.a del capítulo I).

Ejemplo: la bisectriz de un ángulo es el conjunto de todos los puntos del ángulo que equidistan de los lados del ángulo (esto se probó en el ej. 5.a del capítulo I).

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos, por lo tanto, es una figura. Para que una figura dada sea el lugar geométrico de los puntos que cumplen la propiedad P , es necesario que se cumplan dos proposiciones:

(1) que todos los puntos que cumplen la propiedad P pertenecen a la figura y (2) que todos los puntos de la figura cumplan la propiedad P .

Ejemplo: si definimos BISECTRIZ de un ángulo como "el lugar geométrico de los puntos del ángulo que equidistan de los lados", entonces la semirrecta con origen en el vértice del ángulo que lo divide en dos ángulos iguales es la bisectriz.

En efecto: (1) todos los puntos del ángulo que equidistan de los lados pertenecen a la semirrecta, y (2) todos los puntos de la semirrecta equidistan de los lados.

A la proposición (1) se le suele llamar *teorema directo*, y a la proposición (2), *teorema recíproco*.

Definición: llamamos *circunferencia de centro O y radio R* al lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia R de O .

$$C(O, R) = \{P / P \in \alpha, d(P, O) = R\}$$

Definición: llamamos *círculo de centro O y radio R* al lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia de O menor o igual que R : $C^{\circ}(O, R) = \{P / P \in \alpha, d(P, O) \leq R\}$.

Ejercicio: halle el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia d de una recta r .

Sean $P / d(P, r) = d$, $Q / d(Q, r) = d$, siendo P y Q puntos distintos de un mismo *semiplano abierto* de borde r (esto es, un semiplano sin el borde). Los segmentos de perpendiculares desde P y Q a la recta r son PP' y QQ' .

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PP'} = \overline{QQ'} = d \\ \text{Luego, } \left. \begin{array}{l} PP' \perp r \\ QQ' \perp r \end{array} \right\} \Rightarrow PP' // QQ' \end{array} \right\} \stackrel{\text{def.B}}{\Rightarrow} PP'Q'Q \text{ paralelogramo} \Rightarrow PQ // P'Q' = r.$$

Si llamamos $h = PQ$, hemos probado que los puntos que distan d de r están en h , siendo h una paralela a r / $d(h, r) = d$ (teorema directo). Por otra parte, es inmediato que si un punto pertenece a h entonces ese punto está a una distancia d de r (teorema recíproco).

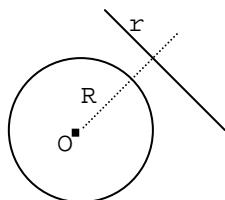
Finalmente, hay que observar que hay otra recta h' paralela a r a esa distancia en el semiplano opuesto de borde r .

Luego, si L es el lugar geométrico pedido tenemos que $L = h \cup h'$.

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.

Recordemos que la distancia del centro O a la recta r es el segmento de perpendicular trazado del punto a la recta. Este segmento es el menor que se puede trazar desde el punto a la recta.

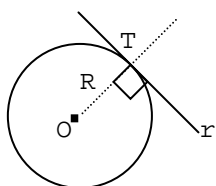
Sea R el radio de la circunferencia. Tenemos tres posibilidades:



$$1) d(O, r) > R$$

En este caso, todos los puntos de la recta están a una distancia del centro mayor que el radio, por lo tanto ninguno pertenece a la circunferencia. Decimos que la recta es *exterior a la circunferencia*.

$$2) d(O, r) = R$$

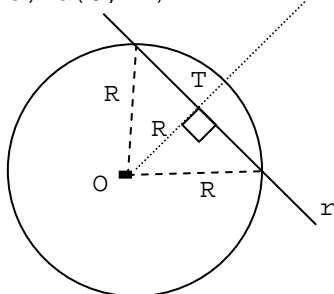


En este caso, sólo el pie T de la perpendicular está a una distancia R del centro; los demás puntos de la recta están a una distancia mayor y por lo tanto no pertenecen a la circunferencia. Decimos que la recta es *tangente a la circunferencia* (i. e.: una recta es tangente a una circunferencia si tiene un solo punto en común con ésta).

Observemos que la tangente es perpendicular al radio que tiene por extremo el punto de tangencia T .

Recíprocamente, si una recta es perpendicular al radio TO , es tangente a la circunferencia y el punto de contacto es T .

$$3) d(O, r) < R$$



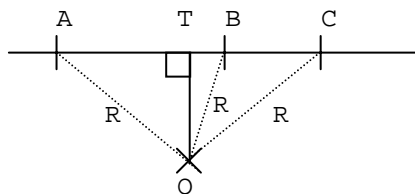
Llamemos $d(O, R) = d$, $d < R$. Sea T el pie de la perpendicular trazada desde O hasta r .

Consideremos un triángulo rectángulo con un cateto d y una hipotenusa R . Por el teorema de Pitágoras, el otro cateto está dado por $x = \sqrt{R^2 - d^2}$. Luego, si construimos un segmento contenido en r , de medida $2x$ y tal que T es su punto medio, resulta que sus extremos están a una distancia R de O .

Por lo tanto, r tiene dos puntos en la circunferencia. Decimos que la recta es *secante a la circunferencia* (i. e.: una recta es secante a una circunferencia si tiene dos puntos en común con ella).

Observación: una recta no puede tener tres puntos en común con una circunferencia.

En efecto, supongamos que tres puntos distintos A , B y C de una misma recta están a una distancia R de un punto O .

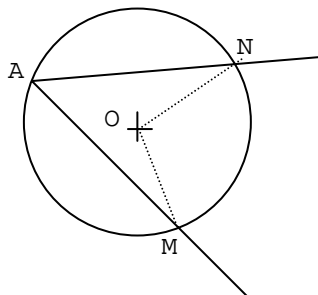


Se forman con el pie de la perpendicular T tres triángulos rectángulos iguales (pues tienen respectivamente iguales dos lados desiguales, que son el cateto OT y la hipotenusa, y el ángulo opuesto al lado mayor), de donde los tres segmentos TA , TB y TC son iguales y su medida es

$$x = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Pero si A precede a T , hay un único segmento TA que mide x (por transporte de segmento). También, si T precede a B , hay un único segmento TB de medida x . No podemos encontrar en la recta el punto C que sea distinto de A y de B . Concluimos que una recta no puede tener más de dos puntos en común con una circunferencia.

Ángulos inscritos en una circunferencia.



Llamamos así a los ángulos que tienen su vértice sobre una circunferencia y sus lados son secantes a la misma.

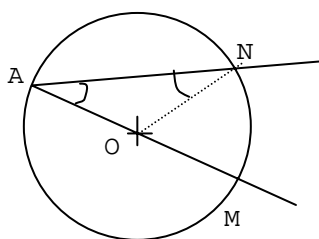
En la figura, $\angle MAN$ es un ángulo inscrito y $\angle MON$ es un ángulo al centro.

Teorema: "Todo ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo al centro correspondiente."

Demostración.

Consideraremos los tres casos posibles:

a) El centro de la circunferencia pertenece a uno de los lados del ángulo inscrito.



En la figura vemos que el triángulo AON es isósceles por tener dos de sus lados iguales al radio de la circunferencia. En consecuencia, es isoángulo, de modo que $\angle OAN = \angle ONA$.

$\angle NOM$ es ángulo externo al $\angle AON$. Por el teorema del ángulo externo es igual a $\angle OAN + \angle ONA$.

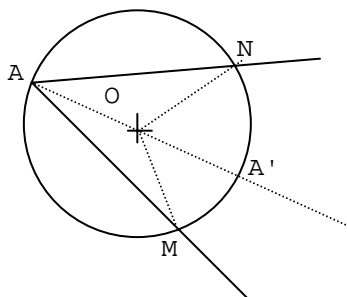
Como estos dos ángulos son iguales, resulta que $\angle NOM = 2\angle OAN = 2\angle MAN$.

En esta igualdad, el término de la izquierda es el ángulo al centro y el término de la derecha es el doble del ángulo inscrito.

b) El centro de la circunferencia es un punto interior al ángulo inscrito.

El ángulo inscrito $\angle MAN$ es igual a la suma de los ángulos inscritos consecutivos $\angle MAA'$ y $\angle A'AN$, de modo que el centro O pertenece a AA' .

Aplicando lo demostrado en la parte (a) a cada uno de los ángulos inscritos que tienen un lado que pasa por el centro tenemos:

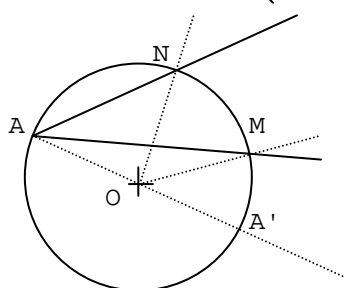


$$\left. \begin{aligned} \angle MAA' &= \frac{1}{2} \angle MOA' \\ \angle A'AN &= \frac{1}{2} \angle A'ON \\ \angle MAN &= \angle MAA' + \angle A'AN \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle MAN = \frac{1}{2} \angle MOA' + \frac{1}{2} \angle A'ON \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MAN = \frac{1}{2} (\angle MOA' + \angle A'ON) = \frac{1}{2} \angle MON.$$

c) El centro de la circunferencia es un punto exterior al ángulo inscrito.

Análogamente tenemos:



$$\left. \begin{aligned} \angle A'AM &= \frac{1}{2} \angle A'OM \\ \angle A'AN &= \frac{1}{2} \angle A'ON \\ \angle MAN &= \angle A'AN - \angle A'AM \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle MAN = \frac{1}{2} \angle A'ON - \frac{1}{2} \angle A'OM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MAN = \frac{1}{2} (\angle A'ON - \angle A'OM) = \frac{1}{2} \angle MON.$$

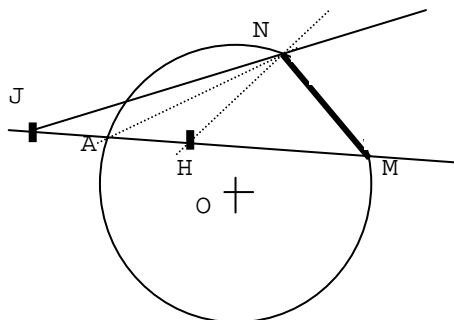
Corolario: "Dado un arco MN de una circunferencia, todos los ángulos inscritos con el vértice perteneciente al arco y sus lados pasando por M y N, son iguales."

En efecto, todos son iguales a la mitad del ángulo al centro MON, y por lo tanto son iguales entre sí.

Si desde un punto A trazamos las semirrectas AM y AN formando un ángulo α , decimos que el punto A ve al segmento MN bajo un ángulo α .

Teorema: "Si un punto de un arco MN ve al segmento MN bajo un ángulo α , los puntos interiores y exteriores al arco ven al segmento bajo un ángulo distinto de α ."

Demostración.

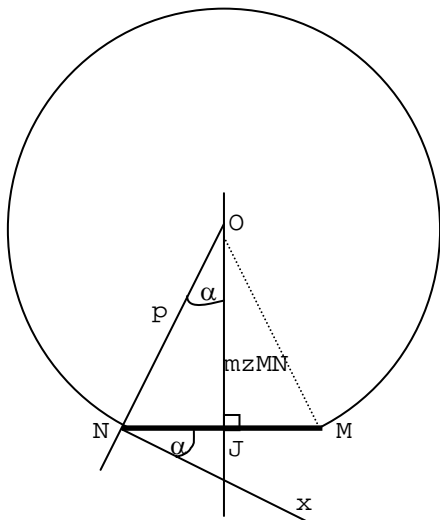


Si el punto H es interior al arco, sea $\{A\}$ la intersección de la semirrecta MH con el arco MN. Entonces, el $\angle MHN$ es ángulo externo al $\angle NHA$ y por lo tanto es mayor que el ángulo inscrito MAN (que coincide con el $\angle HAN$). Si el punto J es exterior al arco, definimos A como la intersección de la semirrecta JM con el arco MN. Entonces, el $\angle MAN$ es ángulo externo al $\angle NAJ$ y por lo tanto el $\angle NJM$ (que coincide con el $\angle NJA$) es menor que el $\angle MAN$.

Teorema: "El lugar geométrico de los puntos P que ven un segmento MN bajo un ángulo $\angle MPN = \alpha$ (antihorario) es un arco de circunferencia de cuerda MN, exceptuando los extremos M y N de la cuerda."

Demostración.

Vamos a construir un arco cuyos puntos vean al segmento MN bajo un ángulo α .



Construimos $\angle MNx = \alpha$. Trazamos la recta $p / p \perp Nx$ por N. Sea $\{O\} = p \cap mzMN$, siendo J el P.m.MN. Trazamos la circunferencia de centro O y radio OM. Construido de esta manera, el ángulo NOJ es igual a α (por ángulos de lados perpendiculares, ej (1) del cap I) y también es la mitad del ángulo al centro MON (porque OJ es altura del triángulo isósceles MON, también es bisectriz). Entonces, todo punto P del arco MN ve al segmento MN bajo un ángulo que es igual a α .

Hemos demostrado el llamado teorema recíproco: "Todos los puntos P del arco MN construido ven al segmento MN bajo un ángulo α ".

Para probar el teorema directo: "Todos los puntos P que ven al segmento MN bajo un ángulo α (antihorario) están en el arco MN construido", basta recordar el teorema anterior.

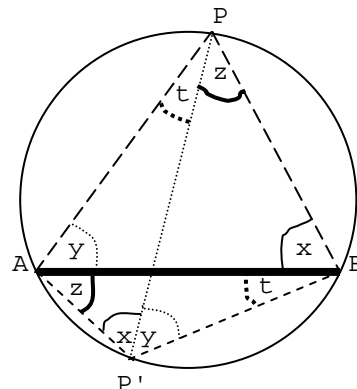
Observación: si quitamos la restricción de que el ángulo MPN sea antihorario, el lugar geométrico está formado por dos arcos MN iguales, ubicados en semiplanos opuestos de borde MN.

Ejercicio: en una misma figura, construya un segmento AB de 4 cm y dibuje en uno de los semiplanos de borde AB los arcos capaces desde los cuales se ve el segmento bajo ángulos de 30° , 45° , 60° , 90° , 120° .

Observaciones:

1) Los extremos del segmento AB no pertenecen al arco capaz del ángulo α para el segmento AB. ¿Por qué?

2) Los puntos del arco que completan la circunferencia que contiene al arco AB, ven al segmento AB bajo un ángulo suplementario del ángulo α (es decir, $180^\circ - \alpha$). En efecto, en una circunferencia P y P' ven la misma cuerda AB desde arcos complementarios. Según la figura, tenemos que:
 $2(\angle x + \angle y + \angle z + \angle t) = 360^\circ$
 $\angle x + \angle y + \angle z + \angle t = 180^\circ$
 $\angle x + \angle y = 180^\circ - (\angle z + \angle t) \Rightarrow \angle AP'B = 180^\circ - \angle APB.$



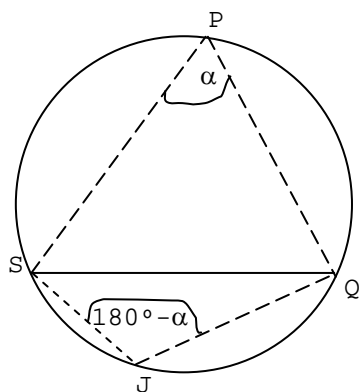
3) Llamamos *cuadrilátero inscrito en una circunferencia* al que tiene sus cuatro vértices en la circunferencia. Por la observación (2) vemos que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.

Llamamos *cuadriláteros inscribibles* a los que pueden inscribirse en una circunferencia. Es condición necesaria y suficiente para ello que un par de ángulos opuestos sumen 180° .

En efecto:

Condición necesaria: "Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, un par de ángulos opuestos suman 180° ". Ya se probó.

Condición suficiente: "Si un cuadrilátero tiene un par de ángulos opuestos que suman 180° , entonces puede inscribirse en una circunferencia".



Demostración: Sea PQRS / $\angle SPQ + \angle QRS = 180^\circ$.

$P \in \text{Ac}(SQ, \angle \alpha)$, $\angle SPQ = \alpha$.

Por la observación (2), todo punto J del arco complementario es tal que $\angle SJQ = 180^\circ - \alpha$.

Si R no pertenece a dicho arco complementario, hay dos posibilidades:

1) R es interior a la región limitada por el segmento SQ y el arco complementario:

$\angle QRS > 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle SPQ + \angle QRS > 180^\circ$ ABSURDO

2) R es exterior :

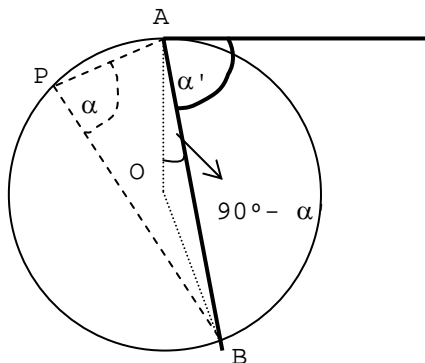
$\angle QRS < 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle SPQ + \angle QRS < 180^\circ$ ABSURDO.

Concluimos que R pertenece al arco, por lo tanto PQRS está inscrito en una circunferencia.

4) En una misma circunferencia (o en circunferencias de igual radio) si dos ángulos al centro son iguales, entonces subtienden cuerdas (y arcos) iguales. En efecto, se forman triángulos iguales por el criterio LAL.

5) En una misma circunferencia (o en circunferencias de igual radio) si dos ángulos inscritos son iguales, entonces subtienden cuerdas (y arcos) iguales. En efecto, si los ángulos inscritos son iguales, los ángulos al centro correspondientes también son iguales y vale la observación (1).

Ángulos semiinscritos en una circunferencia.



Son los que tienen un lado secante a una circunferencia y el otro lado es tangente a la misma.

Teorema: "Todo ángulo semiinscritos en una circunferencia es igual al ángulo inscrito que abarca el mismo arco."

Demostración:

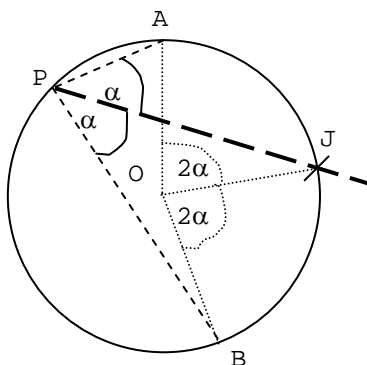
$$\begin{aligned} 2\alpha &= \angle AOB = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha') = \\ &= 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha' = 2\alpha' \Rightarrow \alpha = \alpha' \end{aligned}$$

Una cuerda subtiende dos arcos, que completan la circunferencia. En la figura precedente, podemos diferenciarlos diciendo arco AB mayor y arco AB menor. Otra posibilidad, es nombrar el arco por tres puntos, por ejemplo en la figura siguiente son complementarios el arco APB y el arco AJB.

Aceptaremos como cierto que, en una misma circunferencia, cuerdas iguales subtienden arcos iguales y recíprocamente.

Definición: llamamos *punto medio de un arco* al punto que divide al arco en dos arcos iguales.

Teorema: "la bisectriz de un ángulo inscrito corta al arco por él abarcado en su punto medio".



Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \angle APJ = \frac{1}{2} \angle AOJ = \alpha \\ \angle BPJ = \frac{1}{2} \angle BOJ = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle AOJ = \angle BOJ \\ \overline{AO} = \overline{BO} = \text{radio} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{OJ lado común} \\ \text{LAL} \end{array} \Rightarrow \triangle AOJ = \triangle BOJ$$

Entonces, $\overline{AJ} = \overline{BJ} \Rightarrow \text{arcoAJ} = \text{arcoBJ}$.

Ejercicios.

- 1) Todo ángulo inscrito cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro, es recto.
- 2) Todo ángulo de vértice interior a un círculo es mayor que cualquier inscrito que abarque el arco por él abarcado.
- 3) Todo ángulo de vértice interior a un círculo es la semisuma de los ángulos al centro que abarcan los mismos arcos que él y su opuesto por el vértice.
- 4) Todo ángulo de vértice exterior a un círculo (es decir, que tiene un vértice exterior al círculo y sus lados son secantes o tangentes a la circunferencia) es menor que cualquier inscrito que abarque el mayor arco por él abarcado.
- 5) Todo ángulo de vértice exterior a un círculo es la semidiferencia de los ángulos al centro que abarcan los arcos por él abarcados.