PROBLEMA 12

Selección de problemas propuestos en exámenes de 2° año de Bachillerato Diversificado. Libro editado por ANEP y que hay un ejemplar en TODAS las bibliotecas de los liceos de todo el pais. (Tapa azul)

Orientación Científica-Diciembre 1996

→ *Liceo de Durazno*

❶ Determinar N natural tal que $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$ y sabiendo que el número de divisores de N es 48, $a < b < c$ $\quad$ $M.C.D.(N, 63) = 9$ $\quad$ $m.c.m.(N, 3360) = 30240$

❷ Sea $z = (a, b-1)$ y $w = (a-1, \sqrt{b})$ expresarlos en notación polar y hallar z^2 y $\sqrt[3]{w}$ ← número complejo, lindo tema

❸ Demostrar $2n(3n+1) + 3^{2n} + 7 = \dot{4}$

SOLUCIÓN

$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$

$\nu_N = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$

↓ número de divisores de N

❶ $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) = 48 \qquad 48 = 2^4.3$

$$\left.\begin{array}{l} M.C.D.(N,63) = 9 \Rightarrow N = 9.N' \\ \qquad\qquad\qquad\quad 63 = 9.7 \end{array}\right\} M.C.D.(N',7) = 1$$

m.c.m.(N, 3360)=30240

$$\left.\begin{array}{l} 3360 = 2^5.5.7.3 \\ 30240 = 2^5.5.7.3^3 \end{array}\right\} 3^3 \text{ no divide a } 3360 \Rightarrow 3^3 \text{ divide a } N \Rightarrow N = 3^3 .\text{—}.\text{—}$$

7 no es factor de N ya que M.C.D. $(N',7) = 1 \Rightarrow$ 5 y 2 sí deben serlo ya que N tiene 3 factores primos.

a=2 $\quad$ b=3 $\quad$ c=5 $\quad$ (a<b<c) $\qquad\qquad N = 2^{\alpha}.3^3.5^{\gamma}$ y $\beta = 3$

$$\nu_N = (\alpha+1)\underbrace{(\beta+1)}_{4}(\gamma+1) = 48 \Rightarrow (\alpha+1)(\gamma+1) = 12$$

$\gamma = 1$ ya que en el m.c.m tenemos 5^1 por lo que N no puede tener más de un factor 5

$\Rightarrow (\alpha+1).2 = 12 \Rightarrow \alpha+1 = 6 \qquad \underline{\alpha = 5}$

$N = 2^5.3^3.5 \qquad N=4320$

$$\boxed{\text{Solución } N = 4320}$$

$$\boxed{2n(3n+1)+3^{2n}+7=\dot{4}}$$

Compruebo para $n=0$ $\quad 1+7=8 \qquad 8=\dot{4}$

H) $n=h \qquad 2h(3h+1)+3^{2h}+7=\dot{4}$ $\qquad$ T) $n=h+1 \qquad 2(h+1)[3(h+1)+1]+3^{2(h+1)}+7=\dot{4}$

Demostración

$$2(h+1)[3h+1+3]+3^{2h+2}+7=\dot{4}$$

$$2(h+1)(3h+1)+2(h+1).3+3^{2h}.3^2+7=\dot{4}$$

$$(2h+2)(3h+1)+6h+6+3^{2h}(8+1)+7=\dot{4}$$

$$2h(3h+1)+2(3h+1)+6h+6+8.3^{2h}+3^{2h}+7=\dot{4}$$

$$2h(3h+1)+6h+2+6h+6+8.3^{2h}+3^{2h}+7=\dot{4}$$

$$2h(3h+1)+12h+8+8.3^{2h}+3^{2h}+7=\dot{4}$$

$$\underbrace{2h(3h+1)+3^{2h}+7}_{\text{Por Hipotesis es } \dot{4}}+\underbrace{4\left(3h+2+2.3^{2h}\right)}_{\dot{4}}=\dot{4}$$

Se verifica $\forall n,\ n\in N$.

❷ a) $\sum_{1}^{n}[4+(a-2)i]=4n(b+n)$

n=1 $\sum_{1}^{1}[4+(a-2)i]=4(b+1) \Rightarrow 4+a-2=4b+4 \Rightarrow \underline{a-4b=2}$

n=2 $\sum_{1}^{2}[4+(a-2)i]=8(b+2) \Rightarrow 4+a-2+4+2a-4=8b+16 \Rightarrow 2+3a=8b+16 \Rightarrow \underline{3a-8b=14}$

$$\begin{cases} a-4b=2 \quad (-2) \\ 3a-8b=14 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} -2a+8b=-4 \\ 3a-8b=14 \\ \hline \boxed{a=10} \end{array}$$

$10-4b=2 \Rightarrow -4b=-8 \Rightarrow \boxed{b=2}$

b) $\sum_{1}^{n}(4+8i)=4n(2+n)$ se cumple $\forall n, n \in N, \geq 1$

Para n=1 se cumple

H) $n=h \quad \sum_{1}^{h}(4+8i)=4h(2+h)$ T) $n=h+1 \quad \sum_{1}^{h+1}(4+8i)=4(h+1)(2+h+1)$

Demostración:

$$\sum_{1}^{h+1}(4+8i) = \sum_{1}^{h}(4+8i) + \sum_{h+1}^{h+1}(4+8i)$$

$$4(h+1)(h+3)=4h(2+h)+4+8.(h+1)$$

$$4(h^2+4h+3)=8h+4h^2+4+8h+8$$

$4h^2+16h+12=4h^2+16h+12$ Se verifica.