Prof. Patricia Echenique, Prof. Jorge Aldao, Prof. Saúl Tenenbaum

Examen de Matemática II 18 de diciembre de 2009

1) a) Discutir y resolver el siguiente sistema de acuerdo con los valores del parámetro m real:

$$\begin{cases} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x-y+m^2z=m-1 \end{cases}$$

b) Resolver la ecuación matricial $AX+B=A^2$ siendo: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) Resuelver las siguientes integrales: a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}dx$ b) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{(x+5)\sqrt{x}}\,dx$

3) a) Determinar a y b para que *f* sea derivable en $\Re$. $f: f(x)=\begin{cases} bx^2+ax\ , & x\le -1 \\ \dfrac{a}{x}, & -1<x\le 1 \\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & x>1 \end{cases}$

b) Estudio analítico y representación gráfica de $g: g(x)=Lx-L(Lx)$

4) En este triángulo se han dispuesto números naturales:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
....

a) ¿Cuánto es la suma de todos los números que ocupan la fila 25 de este triángulo?
b) Implementar una función en Haskel que nos devuelva, al ingresarle el número de fila, una lista con los elementos de la fila. Por ejemplo, fila 5 = [11,12,13,14,15]
b') Indicar las sucesiones P_n y U_n que devuelven el primer y el último término de la fila n-sima. Por ejemplo $P_5=11$ $U_5=15$
.

Sea la sucesión $a_n=\begin{cases} a_0=2 \\ a_1=-1 \\ a_n=2.a_{n-1}+3.a_{n-2}+(-3)^n \end{cases}$ $\forall n,\quad n\in\mathbb{N}$

c) Implementar la función "suce n" en Haskell que nos permita calcular por recurrencia cualquier termino de dicha sucesión
d) Hallar una fórmula explicita para esta sucesión.

Soluciones:

4) a) Suma $S_n = \dfrac{n.(n^2+1)}{2}$

4)c)

```
suce::  Integer->Integer
suce n          |n<0       =error "n tiene que ser un numero natural"
                |n==0      =2
                |n==1      =(-1)
                |otherwise = (2)*suce(n-1) + (3)*suce (n-2) + (-3)^n
```

4)d)

```
expli::  Integer->Integer
expli n = div (     5*(-1)^n +  5*3^n  +  6*(-3)^n     ) 8
```

(Los espacios en blanco son sólo para que quede un poco más claro).

Para poder seguir utilizando Integer se ha usado "div" para hacer las divisiones entre 8.
Entonces, he tenido que utilizar 8 como común denominador.
Repaso: "div" devuelve el cociente.
Ejemplo: div 12 4 = 3
div 13 4 = 3
mod 13 4 = 1   Con "mod" tenemos el resto de la división.

Es este un ejercicios de ecuaciones en diferencias finitas no homogeneas

$a_n = 2.a_{n-1} + 3.a_{n-2} + (-3)^n$ con las condiciones iniciales, llamadas condiciones de frontera:

$a_0 = 2 \quad y \quad a_1 = -1$

Para empezar, la escribimos en la forma $a_n - 2.a_{n-1} - 3.a_{n-2} = (-3)^n$

Resolvemos primero la ecuación característica que corresponde a la ecuación homogenea:

$r^2 - 2r - 3 = 0$. Tiene raices -1 y 3.

Entonces la solución de la ecuación homogenea será : $a_n = C_1.(-1)^n + C_2.(3)^n$

Estas constantes $C_1 \;\; y \;\; C_2$ las calcularemos más adelante, no ahora. En el futuro.

Paso siguiente: buscamos una solución particular. Buscamos una solución "parecida" a la parte no homogenea. Lo intentaremos con $a_n = K.(-3)^n$

Sustituyendo en la ecuación original, la no homogenea,

$a_n - 2.a_{n-1} - 3.a_{n-2} = (-3)^n$ para n=2, nos queda:

$$a_2 - 2a_1 - 3a_0 = (-3)^2 \quad \Rightarrow \quad K.(-3)^2 - 2.K.(-3)^1 - 3.K.(-3)^0 = 3^2$$

$$\Rightarrow \quad 9K + 6K - 3K = 9 \quad \Rightarrow \quad 12K = 9 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{3}{4}$$

Entonces la solución general es la suma de las soluciones de la homogenea y de la no homogenea:

$$a_n = C_1.(-1)^n + C_2.(3)^n + \frac{3}{4}.(-3)^n$$

¡¡ Llegó el futuro !!

Para calcular $C_1 \; y \; C_2$, usamos ahora las condiciones iniciales $a_0 = 2, \; a_1 = -1$.

$$a_0 = C_1.(-1)^0 + C_2.(3)^0 + \frac{3}{4}.(-3)^0 \quad \Rightarrow \quad 2 = C_1.1 + C_2.1 + \frac{3}{4}.1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4} = C_1 + C_2$$

$$a_1 = C_1.(-1)^1 + C_2.(3)^1 + \frac{3}{4}.(-3)^1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -C_1 + 3.C_2 - \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4} = -C_1 + 3.C_2$$

Entonces, resolviendo el sistema de ecuaciones, queda: $C_1 = \frac{5}{8} \quad y \quad C_2 = \frac{5}{8}$

En resumen, la solución total de la ecuación en diferencias finita, de segundo orden, no homogenea, es :

$$a_n = \frac{5}{8}.(-1)^n + \frac{5}{8}.(3)^n + \frac{3}{4}.(-3)^n \qquad \forall n, \quad n \in N$$

Para Haskell, conviene hacer común denominador 8: $a_n = \dfrac{5.(-1)^n + 5.(3)^n + 6.(-3)^n}{8}$