

Solución del Examen de Matemática I - 19 de setiembre de 2011

Ejercicio 1

- a) Dados los conjuntos $A = \{-1,1,2\}$ y $B = \{2,-3\}$, hallar el mayor conjunto X que cumpla simultáneamente con: $X \subseteq A \cup B$, $X - A = \{-3\}$ y $X \cap A \cap B \neq \emptyset$. Justificar.

$$X \subseteq \{-1,1,2,-3\}$$

$$A \cap B = \{2\} \rightarrow 2 \in X$$

Si consideramos $X = \{-1,1,2,-3\}$, entonces $\{-1,1,2,-3\} - \{-1,1,2\} = \{-3\}$ y además $\{-1,1,2,-3\} \cap \{-1,1,2\} \cap \{2,-3\} = \{2\}$

- b) Analizar la veracidad de las siguientes propiedades, en caso afirmativo demostrarlas y en caso contrario dar un contraejemplo:

i) $(\#A \leq \#B) \wedge B \subseteq A \rightarrow \#A = \#B$. Es verdadero.

$$\left. \begin{array}{l} (\#A \leq \#B) \\ \wedge \\ B \subseteq A \rightarrow \#B \leq \#A \end{array} \right\} \rightarrow \#A = \#B$$

ii) $A - (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cup C)}$. Es falso

A	B	C	$(B \cap C)$	$A - (B \cap C)$	$(B \cup C)$	$\overline{(B \cup C)}$	$A \cap \overline{(B \cup C)}$
1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0

Solo basta encontrar un contraejemplo, considerando A, B y C subconjuntos de N :

$$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, B = \{0,2,4,6,8\} \text{ y } C = \{0,4,8\}$$

$$B \cap C = C = \{0,4,8\}$$

$$A - (B \cap C) = \{1,2,3,5,6,7,9\}$$

$$B \cup C = B = \{0,2,4,6,8\}$$

$$\overline{(B \cup C)} = N - (B \cup C)$$

$$A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (N - (B \cup C)) = \{1,3,5,7,9\}$$

Lo cual implica que $A - (B \cap C) \neq A \cap \overline{(B \cup C)}$

- iii) Dados dos conjuntos A y B , si $(B - \bar{A})$ es un conjunto finito, entonces es A finito. Es Falso.

Considerando $A = \{x \in N / 5 \geq x \vee x \geq 10\}$ y $B = \{0,2,4,6,8\}$ subconjuntos de N entonces:

$$(B - \bar{A}) = \{0,2,4,6,8\} - \{6,7,8,9\} = \{0,2,4\}$$

Aquí claramente $\#(B - \bar{A}) = 3$ pero $\#A = \infty$

Ejercicio 2

Sea $A = \{f: Z \rightarrow Z / f \text{ es una función total}\}$, se define una relación R sobre un conjunto A de la siguiente forma $\forall f, g \in A: f R g \leftrightarrow (f 0) = (g 0)$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.

Para demostrar que R es una relación de equivalencia debemos probar que cumple con las siguientes propiedades:

Reflexiva: $\forall f \in A: f R f$

Como f es una función total, tenemos que $(f 0) = (f 0)$

Simétrica: $\forall f, g \in A: \text{Si } f R g \rightarrow g R f$

$$f R g \xrightarrow{\text{def}} (f 0) = (g 0) \rightarrow (g 0) = (f 0) \xrightarrow{\text{def}} g R f$$

Transitiva: $\forall f, g, h \in A: \text{Si } f R g \wedge g R h \rightarrow f R h$

$$\left. \begin{array}{l} f R g \xrightarrow{\text{def}} (f 0) = (g 0) \\ g R h \xrightarrow{\text{def}} (g 0) = (h 0) \end{array} \right\} \rightarrow (f 0) = (h 0) \xrightarrow{\text{def}} f R h$$

b) Siendo $h \in A / (h x) = x^2 + 3$, probar que $p \in A / (p x) = -4x + 3$ pertenece a $[h]$.

Primeramente hallamos la clase de equivalencia de h , es decir $[h]$:

Como $(h 0) = 0^2 + 3 = 3$, tenemos que $[h] = \{f \in A / (f 0) = 3\}$ y como $(p 0) = -4 \cdot 0 + 3 = 3$ concluimos que $p \in [h]$.

c) Hallar los tipos y las expresiones para $(h (p x))$ y $(p (h x))$.

Primero hallamos los tipos

$$\left. \begin{array}{l} p: Z \rightarrow Z \\ x: Z \end{array} \right\} \rightarrow (p x): Z \left\} \rightarrow (h (p x)): Z$$

$$\left. \begin{array}{l} h: Z \rightarrow Z \\ x: Z \end{array} \right\} \rightarrow (h x): Z \left\} \rightarrow (p (h x)): Z$$

Ahora hallamos las expresiones:

$$(h (p x)) = h (-4x + 3) = (-4x + 3)^2 + 3 = 16x^2 - 24x + 9 + 3 = 16x^2 - 24x + 12$$

$$(p (h x)) = p(x^2 + 3) = -4(x^2 + 3) + 3 = -4x^2 - 12 + 3 = -4x^2 - 9$$

Ejercicio 3

Sean $D(a)$ y $M^*(a)$ el conjunto de los **divisores** y de los **múltiplos** de cierto número $a \in N^*$ respectivamente. Ejemplo $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$ y $M^*(3) = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\} = \{x \in N^* / x = 3\}$.

Definimos sobre N^* una relación S tal que $\forall a, b \in N^*: a S b \leftrightarrow a \in D(b)$.

a) Demostrar que S es una relación de orden y caracterizarla como "orden parcial o total".

Para demostrar que S es una relación de orden debemos probar que cumple con las siguientes propiedades:

Reflexiva: $\forall a \in N^*: a S a$

Como $a \in D(a)$ pues $a \cdot 1 = a$ tenemos que $a S a$

Antisimétrica: $\forall a, b \in N^*$: Si $a S b \wedge b S a \rightarrow a = b$

$$\left. \begin{array}{l} a S b \xrightarrow{\text{def}} a \in D(b) \rightarrow \exists k \in N^* / a.k = b \\ b S a \xrightarrow{\text{def}} b \in D(a) \rightarrow \exists p \in N^* / b.p = a \\ k = p = 1 \\ a.k = b \end{array} \right\} \rightarrow a.k.p = b.p = a \rightarrow k.p = 1 \rightarrow k = p = 1$$

Transitiva: $\forall a, b, c \in N^*$: Si $a S b \wedge b S c \rightarrow a S c$

$$\left. \begin{array}{l} a S b \xrightarrow{\text{def}} a \in D(b) \rightarrow \exists k \in N^* / a.k = b \\ b S c \xrightarrow{\text{def}} b \in D(c) \rightarrow \exists p \in N^* / b.p = c \\ \exists (k.p) \in N^* / a.(k.p) = c \end{array} \right\} \rightarrow a.k.p = b.p = c \rightarrow \exists (k.p) \in N^* / a.(k.p) = c$$

$$\exists (k.p) \in N^* / a.(k.p) = c \xrightarrow{\text{def}} a S c$$

La relación S es una relación de orden parcial pues $\exists a, b \in N^* / (a, b) \notin S \wedge (b, a) \notin S$.

Solo basta considerar dos números primos entre sí, por ejemplo: $a = 7$ y $b = 4$

$D(7) = \{1,7\}$ y $D(4) = \{1,2,4\}$

Como es fácil de observar: $7 \notin D(4) \rightarrow (7,4) \notin S$ y por otro lado $4 \notin D(7) \rightarrow (4,7) \notin S$

- b) Analizar la situación si en lugar de $D(a)$ consideramos $M^*(a)$, es decir que definimos sobre N^* una nueva relación T tal que $\forall a, b \in N^*$: $a T b \leftrightarrow a \in M^*(b)$.

Analizamos que propiedades cumple:

Reflexiva: $\forall a \in N^*$: $a T a$

Como $a \in M^*(a)$ pues $a.1 = a$ tenemos que $a T a$

Antisimétrica: $\forall a, b \in N^*$: Si $a T b \wedge b T a \rightarrow a = b$

$$\left. \begin{array}{l} a T b \xrightarrow{\text{def}} a \in M^*(b) \rightarrow \exists k \in N^* / b.k = a \\ b T a \xrightarrow{\text{def}} b \in M^*(a) \rightarrow \exists p \in N^* / a.p = b \\ k = p = 1 \\ b.k = a \end{array} \right\} \rightarrow a.p.k = b.k = a \rightarrow p.k = 1 \rightarrow p = k = 1$$

Transitiva: $\forall a, b, c \in N^*$: Si $a T b \wedge b T c \rightarrow a T c$

$$\left. \begin{array}{l} a T b \xrightarrow{\text{def}} a \in M^*(b) \rightarrow \exists k \in N^* / b.k = a \\ b T c \xrightarrow{\text{def}} b \in M^*(c) \rightarrow \exists p \in N^* / c.p = b \\ \rightarrow \exists (p.k) \in N^* / c.(p.k) = a \end{array} \right\} \rightarrow c.p.k = b.k = a$$

$$\rightarrow \exists (p.k) \in N^* / c.(p.k) = a \xrightarrow{\text{def}} a T c$$

La relación T es una relación de orden parcial por la misma razón que la parte a)

$(7,4) \notin T \wedge (4,7) \notin T$

Ejercicio 4

- a) Considerando $a \in N^*$, definimos una función $f_a: D(a) \rightarrow M^*(a) \rightarrow N^*$ tal que $(f_a x y) = \frac{y}{x}$.
- i) Analizar Inyectividad y sobreyectividad, decidiendo así sobre la Biyectividad.

$$f_a: D(a) \rightarrow M^*(a) \rightarrow N^* \text{ tal que } (f_a x y) = \frac{y}{x}$$

Inyectividad:

Si consideramos $a = 8$, $f_8: D(8) \rightarrow M^*(8) \rightarrow N^*$ tal que $(f_8 x y) = \frac{y}{x}$

$D(8) = \{1,2,4,8\}$

$$\left. \begin{array}{l} (f_8 4 8) = \frac{8}{4} = 2 \\ \wedge \\ (f_8 8 16) = \frac{16}{8} = 2 \end{array} \right\} \rightarrow (f_8 4 8) = (f_8 8 16) \text{ pero } (4,8) \neq (8,16) \text{ por lo tanto } f_8 \text{ no es}$$
 inyectiva.

Sobreyectividad:

Dado $n_0 \in N: \exists (x_0, y_0) \in D(a) \times M^*(a) \quad (f_a x_0 y_0) = n_0?$

$f_a: D(a) \rightarrow M^*(a) \rightarrow N^*$ tal que $(f_a x y) = \frac{y}{x}$

Como $\forall a \in N^*: a \in D(a) \wedge a \in M^*(a)$, entonces considerando $(x_0, y_0) = (a, a.n_0)$, pues $a \in D(a)$ y $a.n_0 \in M^*(a)$.

Con este par tenemos $(f_a x_0 y_0) = (f_a a a.n_0) = \frac{a.n_0}{a} = n_0$ y por lo tanto f_a es sobreyectiva.

Como f_a no es inyectiva, concluimos que f_a no es biyectiva.

ii) Analizar si la función es parcial (en este caso indicar dominio de definición) o total.

Como para cada par de elementos (x, y) con $x \in D(a)$ e $y \in M^*(a)$, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} x \in D(a) \rightarrow \exists k \in N^* / x.k = a \\ \wedge \\ y \in M^*(a) \rightarrow \exists p \in N^* / a.p = y \end{array} \right\} \rightarrow (f_a x y) = \frac{y}{x} = \frac{a.p}{x} = \frac{x.k.p}{x} \stackrel{x \neq 0}{=} k.p \in N^*$$

Entonces concluimos que la función es total.-

b) Sea $f: A \rightarrow B$ una función, y sean $X, Y \subseteq A$ demuestra que: $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

Nota: Si X es un subconjunto de A , entonces $f(X) = \{f(a) / a \in X\}$.

Debemos probar que $\forall b \in f(X \cap Y) \rightarrow b \in f(X) \cap f(Y)$.

Sea $b \in f(X \cap Y) \rightarrow \exists a \in X \cap Y / f(a) = b$.

Si $a \in X \cap Y \stackrel{\text{def}}{\rightarrow} a \in X \wedge a \in Y$

$$\left. \begin{array}{l} a \in X \\ \wedge \\ f(a) = b \end{array} \right\} \rightarrow b \in f(X) \\ \wedge \\ \left. \begin{array}{l} a \in Y \\ \wedge \\ f(a) = b \end{array} \right\} \rightarrow b \in f(Y) \left. \vphantom{\begin{array}{l} a \in X \\ \wedge \\ f(a) = b \end{array}} \right\} \rightarrow b \in f(X) \cap f(Y)$$

Ejercicio 6

- a) Definir por casos una función **divisores** de tipo $(\text{Int} \rightarrow [\text{Int}])$ que dado un entero no negativo, devuelve una lista con sus divisores (no negativos). Ej.: $\text{divisores } 8 = [1, 2, 4, 8]$

```
divisores :: Int -> [Int]
divisores a = [x | x <- [1..a], mod x a == 0]
```

- b) Definir una función **mcd** de tipo $(\text{Int} \rightarrow \text{Int} \rightarrow \text{Int})$ que dados dos enteros (no negativos) devuelve su máximo común divisor.

```
mcd :: Int -> Int -> Int
mcd x 0 = x
mcd x y = mcd y (mod x y)
```