Matemáticas Discretas
por Keneth A. Ross y Charles R. Wright
pág 308 - 309

§ 7.4 Relaciones generales

Cuando introdujimos órdenes parciales $\leqq$ y relaciones de equivalencia $\sim$ en un conjunto S indicamos que cada par $\langle x, y\rangle$ en $S \times S$ o bien satisfacía la relación $[x \leqq y$ o $x \sim y]$ o no la satisfacía. También sutilmente dejamos el término "relación" sin definir. Saber o especificar para cuáles pares una regla se satisface en S es exactamente lo mismo que saber o especificar un subconjunto de $S \times S$. Definiremos ahora de manera formal una **relación binaria** en S como cualquier subconjunto R de $S \times S$.

Esperamos que hasta ahora haya podido desarrollar cierta sensibilidad por los órdenes parciales y las relaciones de equivalencia. Son muy distintas; los órdenes parciales son una especie de "flujo" de pequeño a grande, en tanto que las relaciones de equivalencia dan una partición del conjunto en bloques que no están relacionados llamados [clases de equivalencia]. Por otro lado, la noción de relación binaria es tan general y abstracta que no hay manera de introducirse en ella, excepto el hecho obvio de que las relaciones binarias son subconjuntos de $S \times S$. Estudiamos estos conceptos tan generales ya que nos ayudan para entender hechos comunes de los más conocidos órdenes, relaciones de equivalencia y también funciones. El ver las relaciones binarias como subconjuntos de $S \times S$ nos ayudará a crearlas y manipularlas. Finalmente, las máquinas pueden guardar información útil almacenando pares ordenados, es decir, elementos de alguna relación. Manejar información corresponde entonces a manejar relaciones.

Para relaciones binarias R en S muchas veces utilizamos la notación xRy [que se lee "x está R-relacionada con y"] y que significa que $\langle x, y\rangle \in R$. También $x \not R\, y$ significa que $\langle x, y\rangle \notin R$. Este uso es compatible con nuestra notación $x \leqq y$ y $x \sim y$. De una vez por todas definiremos ahora lo que significa que una relación R sea **reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva:**

ORDEN PARCIAL	ORDEN PARC. ESTRICTO	EQUIV.
R		R
	AR	
		S
AS	AS	
T	T	T

(R) $\quad x\,R\,x$ para toda $x \in S$,

(AR) $\quad x \not R\, x$ para toda $x \in S$,

(S) $\quad x\,R\,y$ implica $y\,R\,x$ para toda $x, y \in S$,

(AS) $\quad x\,R\,y$ y $y\,R\,x$ implica $x = y$,

(T) $\quad x\,R\,y$ y $y\,R\,z$ implica $x\,R\,z$.

Todas estas definiciones pueden escribirse utilizando notación de par ordenado. Por ejemplo,

$$\text{(S)}\quad \langle x, y\rangle \in R \quad \text{implica} \quad \langle y, x\rangle \in R \quad \text{para toda } \langle x, y\rangle \in S \times S.$$

Desde nuestro punto de vista actual, un **orden parcial** en S es una relación [es decir, un subconjunto de $S \times S$] que satisface (R), (AS) y (T). Un **orden parcial estricto** en S es una relación que satisface (AR) y (T) [por lo que [(AS) es verdadera por vacuidad]. Y una **relación de equivalencia** en S es una relación que satisface (R), (S) y (T).

Muchas veces es conveniente considerar la **matriz A** de una relación R, cuando el conjunto S es finito. Los renglones y columnas de **A** tienen índices en S con entradas $\mathbf{A}[x, y] = 1$ si $x\,R\,y$ y $\mathbf{A}[x, y] = 0$ si $x \not R\, y$.

EJEMPLO 1 Ilustramos varias relaciones en $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y damos sus matrices en la figura 1.

a) Sea R_1 la relación definida por $m < n$. Esto es, $m\,R_1\,n$ si y sólo si $m < n$, y $R_1 = \{\langle m, n\rangle \in S \times S : m < n\}$. La relación R_1 es antirreflexiva y transitiva, es decir, como se esperaba, es un orden parcial estricto. La relación R_1 también es antisimétrica por vacuidad:

$$m < n \quad \text{y} \quad n < m \quad \text{implica } n = m$$

ya que la condición "$m < n$ y $n < m$" siempre es falsa. De hecho, el mismo argumento muestra que todos los órdenes parciales son antisimétricos.

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ R_1 \end{array}\qquad \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\\ R_2 \end{array}\qquad \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\\ R_3 \end{array}\qquad \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\ E \end{array}$$

Matrices de las relaciones

Figura 1

b) Sea R_2 la relación definida por $m\,R_2\,n$ si $|m - n| \leqq 1$. Esta relación es reflexiva ya que $|m - m| \leqq 1$ para $m \in S$, y es simétrica ya que $|m - n| \leqq 1$ implica $|n - m| \leqq 1$. No es transitiva ya que, por ejemplo, $2\,R_2\,3$ y $3\,R_2\,4$ pero $2 \not R_2\, 4$.

c) Definamos R_3 como $m \equiv n \pmod 3$, de manera que $m\,R_3\,n$ si y sólo si $m \equiv n \pmod 3$. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva. [teorema 2 de § 4.3] y por lo tanto R_3 es una relación de equivalencia en S.

d) Sea E la "relación de igualdad" en S:

$$E = \{\langle m, n\rangle \in S \times S : m = n\} = \{\langle m, m\rangle : m \in S\}.$$

En otras palabras, $m\,E\,n$ si y sólo si $m = n$. Es claro que E es una relación de equivalencia en S. Nótese que la matriz para la relación E es la matriz identidad de dimensión 4×4. ▮

EJEMPLO 2 Para m, n en $\mathbb{Z}$, definamos $m\,R\,n$ si $m + n$ es un múltiplo de 3, es decir, $m + n \equiv 0 \pmod 3$. Esta relación no es reflexiva ya que por ejemplo $1 \not R\, 1$. No es antirreflexiva ya que $3\,R\,3$. la relación R es simétrica ya que $m + n = n + m$ para $m, n \in \mathbb{Z}$. La relación R no es transitiva; por ejemplo, $4\,R\,2$ y $2\,R\,1$ mientras que $4 \not R\, 1$. ▮