INET Profesorado de Ciencias de la Computación
Más ejercicios para preparar el segundo parcial de Matemática II

7) Calcular $\int e^{4x}.\cos x$

8) Sea $f : f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x+3}}{x-3} & si \quad x > 3 \\ ax+b & si \quad x \leq 3 \end{cases}$

Calcular a y b, reales para que f sea derivable en todos los reales.

9) Sea la función $t : t(x) = \mathrm{sen(x).cos(x)}$

Calcular el área limitada por gráfico de la función t , el eje OX, y las rectas $\mathrm{x} = 0$ y $\mathrm{x} = \pi$

SOLUCIONES: (o por lo menos un intento de hacerlo.....)

7) *MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES*

$$\int f.g' = f.g - \int f'.g$$

$$\int e^{4x}.\cos x = e^{4x}.\sin x - \int 4.e^{4x}.\sin x$$

$f(x) = e^{4x}$ $\qquad f'(x) = 4.e^{4x}$

$g'(x) = \cos x$ $\qquad g(x) = \sin x$

Y ahora, llegamos de nuevo a una integral que no conocemos.
La respuesta es: ¿no te gusta el método de partes? 2 platos !!!!!!!
Si, otra vez partes !!!!

$$\int f.g' = f.g - \int f'.g$$

$$\int 4.e^{4x}.\sin x = 4.\int e^{4x}.\sin x \qquad (el\ 4\ \ lo\ usaremos\ \ al\ final).$$

$$\int e^{4x}.\sin x = -e^{4x}\cos x - \int 4.e^{4x}.(-\cos x) = -e^{4x}\cos x + \int 4.e^{4x}.\cos x$$

$f(x) = e^{4x}$ $\qquad f'(x) = 4.e^{4x}$

$g'(x) = \sin x$ $\qquad g(x) = -\cos x$

Entonces, en resumen, desde el principio:

$$\int e^{4x}.\cos x = e^{4x}.\sin x - 4.(-e^{4x}\cos x + \int 4.e^{4x}.\cos x)$$

Ahora, haciendo un poquito de operaciones y escribiendolo todo en un renglón, queda:

$$\int e^{4x}.\cos x = e^{4x}.\sin x + 4.e^{4x}\cos x - 16.\int e^{4x}.\cos x$$

Despejando.......

$17.\int e^{4x}.\cos x = e^{4x}.\sin x + 4.e^{4x}\cos x$ **¿De dónde salió el 17?** 17=16+1

Y la respuesta final es: $$\boxed{\int e^{4x}.\cos x = \frac{e^{4x}.\sin x + 4.e^{4x}\cos x}{17}}$$

Si queremos que quede un poco más linda, le hacemos chapa y pintura (factorizando):

$$\boxed{\int e^{4x}.\cos x = \frac{e^{4x}.(\sin x + 4.\cos x)}{17}}$$

a) Intenta verificarlo !!! Si definimos la función $j\ \ talque\ \ j(x) = \frac{e^{4x}.(\sin x + 4.\cos x)}{17}$,

entonces su derivada, $j'(x)$ debería ser ...... b) Que tal si pruebas también hacerlo con Derive !!

8) $f : f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x+3}}{x-3} & si\ \ x \neq 3 \\ ax+b & si\ \ x = 3 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1-e^{-x+3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{e^{-x+3}}{1} = 1 \quad Que\ \ grande\ \ L'Hopital!!!!$$

También se podría haber hecho utilizando equivalentes.
Entonces 1=a.3+b ya tenemos la primera ecuación.

Pasemos a la derivada: $f'(x) = \dfrac{e^{-x+3}(x-2)-1}{(x-3)^2}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{e^{-x+3}(x-2)-1}{(x-3)^2} = \lim_{x\to 3}\frac{e^{-x+3}(-x+3)}{2.(x-3)} = Que\ \ grande^2\ \ L'Hopital!!!!$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-e^{-x+3}(x-3)}{2.(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{-e^{-x+3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Y como la función derivada de ax+b es a queda que $a = -\dfrac{1}{2}$

Recordando que 3a+b=1 nos queda que $b = \dfrac{5}{2}$

9) $$\int \sin x.\cos x = \int u = \frac{u^2}{2} = \frac{(\sin x)^2}{2}$$

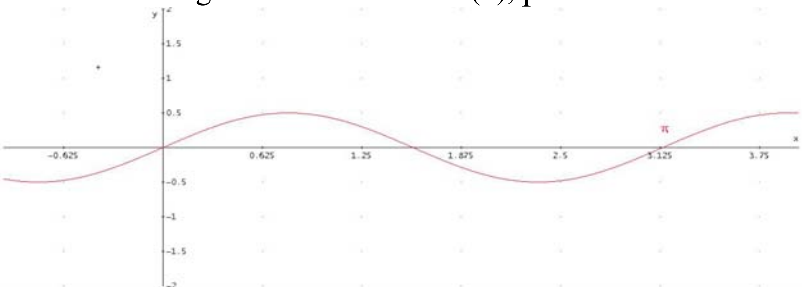
$$Haciendo\ \ u = g(x) = \sin x \Leftrightarrow g'(x) = \cos x$$

Entonces ahora hacemos la integral para averigüar el área:

$$\int_0^{\pi} \sin x.\cos x = \left.\frac{(\sin x)^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{(\sin \pi)^2}{2} - \frac{(\sin 0)^2}{2} = 0$$ ¿??¿¿?? Está sospechoso !?!?!!

¿¿¿No nos olvidamos de algo ???????

Vamos a ver la gráfica de la función t(x), por las dudas !!!



Claro !!!!

Esta función tiene una raíz entre O y π. Teníamos que haber realizado la gráfica **antes** de hacer la integral.

Bueno, de los errores se aprende !!!!!

Moraleja: comer muchas verduras y hacer la gráfica siempre antes de plantear la integral.

Vamos a ver si ahora nos sale bien.

El área de la parte positiva de la función coincide con la integral.

En la parte negativa de la función el área es el valor absoluto de la integral; ya que es negativa, le ponemos un signo de "**menos**" adelante para que nos de positiva.

$$\acute{A}rea = \int_0^{\pi} |\sin x.\cos x| = \int_0^{\pi/2} \sin x.\cos x - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x.\cos x = \left.\frac{(\sin x)^2}{2}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{(\sin x)^2}{2}\right|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{(\sin \pi/2)^2}{2} - \frac{(\sin 0)^2}{2}\right) - \left(\frac{(\sin \pi)^2}{2} - \frac{(\sin \pi/2)^2}{2}\right)$$

Recordando que $\begin{array}{l} \sin 0 = 0 \\ \sin(\pi/2) = 1 \\ \sin(\pi) = 0 \end{array}$

$$\acute{A}rea = \left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = \left(\frac{(1)^2}{2}\right) - \left(-\frac{(1)^2}{2}\right) = 1$$

****