Matemática Discreta I - 2007

Práctico 1: Combinatoria y Funciones

Ref. Grimaldi Secciones 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 3.1, 5.1, 5.2 y 5.6

Ejercicio 1 ¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos distintos (en base diez), existen?

Ejercicio 2 a) (Ej1 parte a) del 1er parcial del 2000) Halle la cantidad de palabras distintas que pueden obtenerse permuntando las letras de

$$MOMENTANEAMENTE$$

si la primer letra debe ser O. ¿Y si la primera letra tuviera que ser M u O?

Ejercicio 3 (Ej. 4 del 2do examen del curso 2001) Hallar la cantidad n de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de la palabra $CASAS$. (Por ejemplo C y AA son dos palabras posible, pero CAC no lo es).

Ejercicio 4 ¿De cuántas formas se pueden distribuir las 32 piezas del ajedrez en el tablero sin que los reyes se estén amenazando?

Ejercicio 5 Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuantas formas se puede hacer una selección si

a) No hay restricciones.
b) Debe haber 5 hombres y 5 mujeres.
c) Debe haber un número par de mujeres.
d) Deben haber más mujeres que hombres.
e) Deben haber al menos 6 hombres.

Ejercicio 6 De cuantas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

a) Cinco cartas del mismo palo.
b) Cuatro ases.
c) Cuatro cartas del mismo valor.
d) Tres ases y dos sotas.
e) Tres ases y un par.

Ejercicio 7 Demuestre que la fórmula de Stifel y escriba las primeras 6 líneas del triángulo de Pascal.

Ejercicio 8 a) ¿De cuantas maneras se puede particionar un conjunto de 6 elementos en subconjuntos de cardinal 3, 2 y 1 respectivamente? ¿ Y si todos los subconjuntos tienen cardinal 2?
b) ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos, en n conjuntos de 2 elementos?

Ejercicio 9 ¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse r pelotas del mismo color en n cajas diferentes?

Ejercicio 10 ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 11 a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 niños en 12 sillas puestas en linea?
b) Idem al anterior pero los niños no deben quedar sentados uno junto al otro.

Ejercicio 12 a) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados?
b) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego del domino?
c) ¿De cuántas maneras diferentes puede una torre de ajedrez, desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?

Ejercicio 13 a) Hallar la cantidad de soluciones distintas (enteros no negativos) de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$$

b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el $=$ por un $<$?

Ejercicio 14 ¿Cuántos números en $\{1, 2, 3, ..., 100000\}$ tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos sea 7?

Ejercicio 15 (Ej. 2 del 1er examen del curso 2001) Si p es un número primo, hallar la cantidad n de 4-uplas (a, b, c, d) de enteros mayores que 1 cuyo producto es $p \cdot p^3 \cdot p^7 \cdot p^9$. Es decir:

$$n = \left|\{(a, b, c, d) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^4 : \ a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d = p{\cdot}p^3{\cdot}p^7{\cdot}p^9\}\right|.$$

Ejercicio 16 a) Para n y t positivos, probar que el coeficiente en $x_1^{n_1}\ x_2^{n_2}.....\ x_i^{n_i}$ de $(x_1 + x_2 + ... + x_i)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_i!.}$$

con $(n_1 + n_2 + ... + n_i) = n$.
b) (Ej. 3 del 1er parcial del 2001) Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de

$$\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)^6.$$

Ejercicio 17 a) Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula para del binomio.
b) Probar que:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, C_j^n = 0.$$

c) (Ej. 4 del 1er parcial del 2000) Hallar el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} \, (-4)^k \, .$$

Ejercicio 18 Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a - 1$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
3. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
4. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = a$.
5. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
6. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
7. (del Ej. 6 Examen 28/2/02) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1$.
   Aclaración: Suponemos que $0 \in \mathbb{N}$.
8. (del Ej. 6 Examen 28/2/02) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$.

Ejercicio 19 Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones y $g \circ f$ la composición de f con g, es decir que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si considera que los conjuntos A, B y C son finitos, pruebe o encuentre un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

1. Si f y g son inyectivas también lo es $g \circ f$.
2. Si f y g son sobreyectivas también lo es $g \circ f$.
3. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es f.
4. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es g.
5. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es f.
6. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es g.

Ejercicio 20 Dados $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, calcule la cantidad de funciones f de A a B que satisfacen:

1. f es inyectiva.
2. f es biyectiva
3. $f(i) < f(j)$ para todo $i < j$ en A.
4. $f(i) \leqslant f(j)$ para todo $i \leqslant j$ en A.

Ejercicio 21 Sea A un conjunto con 10 elementos y B uno con 3 elementos.

a) ¿Cuántas funciones diferentes de A a B hay?

b) Si denotamos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes de X, es decir al conjunto de todos los subconjuntos de X ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(B)$? ¿y el de $\mathcal{P}(A)$?

c) (Examen Agosto 2003) Considere las funciones $f : B \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ que verifican

$$\forall x : \quad f(x) \neq \{x\}.$$

¿Cuántas de dichas funciones hay?

Ejercicios Suplementarios

Ejercicio 22 ¿Cuántas palabras distintas pueden construirse (con o sin sentido), usando todas las letras de la palabra ASALAS?.

Ejercicio 23 Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar una selección con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

Ejercicio 24 En una prueba que consta de 10 preguntas, un estudiante decide responder solo 6 con al menos 3 de esas preguntas elegidas de entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 25 a) (Ej. 3 del 1er parcial del curso 2000) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de

$$\left(x^5 + x - 1\right)^{10}.$$

b) (Ej. 5 del 2do examen del curso 2001) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio

$$(2x + 4y + 2z + 5)^{14}.$$

Ejercicio 26 (Ej. de desarrollo del 1er parcial del 2000) Demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{N-k}{n-i} = \binom{N}{n},$$

siendo $k \leq n \leq N$ números naturales.