Examen 18 de diciembre de 2009

Ejercicio 1

1) Sean x e y números enteros que verifican la relación R definida por $|x-3y| \leq 2$
   i) Investigar si que R es una relación de equivalencia.
   ii) En caso afirmativo, hallar $[5]_R$, $[0]_R$, $[-7]_R$ y el conjunto cociente de R.

2) Sean R y S relaciones definidas para un conjunto A. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas dando una prueba para las mismas. Esto es: si son verdaderas, demostrarlo; si son falsas, dar un contraejemplo.

   i) Si R y S son transitivas, entonces $R \cup S$ es transitiva.
   ii) Si R o S no son transitivas, entonces $R \cup S$ no es transitiva.
   iii) Si R y S son antisimétricas, entonces $R \cup S$ es antisimétrica.
   iv) Si R es simétrica y transitiva entonces R es reflexiva.

3) Implementar una función en Haskell que reciba un numero natural y que haga lo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si\ \ x\ es\ par \\ \dfrac{x-1}{2} & si\ \ x\ es\ múltiplo\ de\ 3 \\ \dfrac{x+1}{2} & si\ \ x\ es\ múltiplo\ de\ 5\ ó\ de\ 7 \\ \dfrac{x}{3} & si\ \ x\ es\ múltiplo\ de\ 9 \end{cases}$$

Es f una función total ? Explique. Clasifiquela. Justifique sus respuestas.

Ejercicio 2

1. Parte 1
   a. Definir una función en Haskell que dados dos enteros devuelva el cociente de la división entre ambos si el primero es múltiplo del segundo, en otro caso devuelve el resto de la división.
   b. Definir una función que dados dos naturales devuelva el par ordenado con primer componente el cociente y segundo componente el resto de la división entera.

Nota: En ambos casos se deberá declarar el tipo de las funciones.

2. Parte 2
   a. Definir el conjunto de los naturales (N) en forma inductiva
   b. Para el conjunto definido en la parte a escribir una función **entre** que dados dos naturales n y m devuelva la lista de los elementos que se encuentran entre n y m. Asumir que el primer natural es mayor o igual que el segundo y que n y m pertenecen a la lista que se devuelve.
   c. Demostrar la siguiente propiedad: $(\forall n, m \in N)(n \geq m)((\text{largo }(\text{entre } n\ m)) = n-m+1)$

<u>Ejercicio 3</u>

1. Definir en Haskell la función **mayor_par**, que recibe una secuencia de largo par de números naturales y devuelve una secuencia con los elementos mayores considerados cada 2.
   Para la secuencia vacía, siempre devuelve la secuencia vacía.
   Ejemplo: mayor_par [2,3,4,5,1,0] = [3, 5, 1]
   mayor_par [1,1] = 1

2. Probar $(\forall l \in [N])((\text{largo } l) \text{ es par})\ (\text{largo } l) = 2*(\text{mayor\_par } l)$

<u>Ejercicio 4</u>

Sean
h : N → [N] → [N]
p: [N]
g : ([N] → [N]) → [N]
t : N → [N]
m : (([N] → N) → [N]) → N → [N]
f : N → N
x: N
q: [N] → N

Indicar si las siguientes expresiones tienen tipo, en caso afirmativo indicarlo, justificando en todo caso la respuesta.

1. t (f x)	5. t (q (g q))	9. q (g q)
2. h (q p) p	6. m h (f (f x))	10. t (q p) x
3. h t	7. q (t (f x))	11. m g t
4. m t p x	8. q (h x (h (f x) p))	12. h (m g)

Ejercicio 5

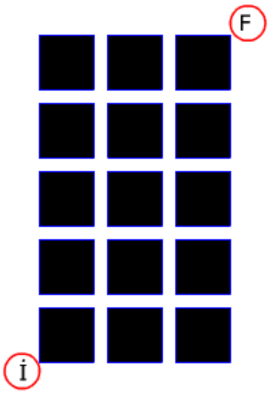
Sea $f(n) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!}$

i) Probar por Inducción Completa: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \forall n,\ n \in \mathbb{N}$

ii) Implementar una función "fu" en Haskell que nos permita calcular los valores de f(n)
(ayuda: se puede definir previamente la función factorial).

Ejercicio 6

i) Todos los días Rodomualdo va a visitar a su novia cuando sale del trabajo, en la Ciudad Vieja. Va desde I hasta F.
Ambos trabajan justo en la esquina.



Rodomualdo se ha propuesto hacer un trayecto diferente cada día, pero siempre caminando las 8 cuadras que lo separan, desde hoy hasta el 31 de enero, fecha en que cumple años Gumersinda, su amada.
Es esto posible? Justificar.

ii) En la oficina de Rodomualdo trabaja mucha gente. Rodomualdo va a invitar a 3 compañeros para que salgan de testigos del casamiento, pero no sabe a quienes elegir porque puede hacerlo de 19600 formas diferentes.
¿Cuántos compañeros de trabajo tiene Rodomualdo? Justificar.