Examen – 8 de diciembre de 2008

Ejercicio 1

1.1) Sea $R \subseteq N x N$, tal que $(x, y) \in R \leftrightarrow |x-y| = \dot{8}$

1. Dar 3 elementos de R, cuya segunda componente sea menor que 2.
2. Probar que R es de equivalencia.
3. Expresar las siguientes clases de equivalencia $[0]_R$, $[5]_R$ y $[8]_R$
4. Dar por extensión una relación $M \subseteq R$, $M \subseteq DxD$ para algún conjunto D, tal que M sea simétrica y asimétrica. Indicar cuál es el conjunto D.

1.2) Sean A, B y E conjuntos, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar la respuesta, dando una prueba para la misma.

1. $A-(A-B)=B$
2. $A \cap B = A \cap E \quad \Rightarrow \quad B = E$

Ejercicio 2

Dada la definición inductiva de N:

i) $0 \in N$
ii) $(S\ n) \in N$, si $n \in N$
iii) CC

1. Definir por casos la función menor que recibe dos naturales y devuelve el menor de ambos.
2. Dar la secuencia de cómputo para (menor 5 2)

Dada la definición de secuencias sobre N:

i) nil $\in S(N)$
ii) (cons a s) $\in S(N)$, si $a \in N \wedge s \in S(N)$
iii) CC

3. Definir una función que dado un natural y una secuencia de naturales, devuelve la secuencia conformada por todos los naturales menores al dado de la secuencia dada.
4. Definir la función *multiplos* que dado un natural y una secuencia de naturales, devuelve la secuencia que contiene los múltiplos del natural dado de la secuencia dada.
   Ejemplo: (multiplos 3 [0, 5, 6, 9, 2]) = [0, 6, 9]

Ejercicio 3

Para los siguientes conjuntos:
$A = \{x \in Z / 2x(x-3)-6 = 2\}$
$B = \{ x \in Z / -2 < x-1 < 4\}$
$C = \{ x \in Z / |x-2| = 1\}$

1. Calcular
   a. A – B
   b. |(B – A) – C|

c. $(B \cup C) \cap A$
d. $(B \cap C) \cap A$

2. Responder
   a. ¿Cuántos números diferentes, de 5 dígitos distintos pueden formarse con los elementos del conjunto B?
   b. ¿Y de 3 dígitos?
   c. ¿Y con los dígitos de (B – C), pudiéndose repetir dígitos?
   d. ¿De cuántas formas se pueden tomar los elementos de $A \cup B \cup C$ para conformar subconjuntos de 4 elementos?
   e. ¿Y si se desea que en todos esté el número -1?

Ejercicio 4

1. Sean $f : N \to N$ y $g : N \to N$ tales que, $(f\ x) = x - 8$ y $(g\ x) = (x-4)^2$
   a. Indicar si son funciones totales o parciales justificando la respuesta
   b. Indicar si son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, justificando la respuesta.
2. Sea $h : (N \to N) \to N \to N$, tal que:
   (h f x) = (f x*x)
   (h g x) = (g (x+2))
   Calcular: (h f 5) y (h g 2)
3. Para
   $t : ((N \to N) \to N \to N) \to N \to N$
   $p : N \to (N \to N) \to N \to N$
   x, y: N
   Indicar si las siguientes expresiones tienen tipo, en caso afirmativo indicarlo, justificando en todo caso la respuesta.

1. h x y 2. h f 3. g (h f) 4. g (h f 3)	5. t h 6. t (h f) 7. h (p x g) 8. g (t h x)	9. f (p 3 f 2) 2 10. h (t h) 11. f (p x g y) (h g) 12. p (g y) (h f) (t h y)

Ejercicio 5

5.1) i) Probar que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i . C_i^n = 0 \quad \forall n,\ n \in \mathbb{N}$

ii) Calcular $\sum_{k=0}^{2009} C_k^{2009} .(-7)^k$

5.2) Probar que la desigualdad $n^3 < 2^n$ se cumple para algún conjunto inductivo y hallar el mayor conjunto inductivo que la cumpla y que este incluido en el conjunto de los números naturales.

Ejercicio 6

6.1) Sea f: $N^* \rightarrow N$ tal que $f(1) = 3$ y $\forall n \in N$: $f(n+1) = f(n) + 7$

a) A partir de algunos valores de f, conjeturar una fórmula para f en función de n.

b) Demostrar la validez de la conjetura anterior $\forall n>0$

c) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f.

6.2) Hallar todos los números naturales a y b que satisfacen que $a^2.b + a.b^2 = 5040$ y que m.c.m. $(a,b) = 90$

Ejercicio 7

7.1) Sea A={34, 72, 51, 25, 44, 39, 62, 84, 70, 124} , se define la relación $\Re \subseteq AxA$ de la siguiente forma: $a \Re b \leftrightarrow$ la suma de todas las cifras de a es igual a la suma de todas las cifras de b

a) Investigar si $\Re$ es una relación de equivalencia.

b) En caso afirmativo, escribir las clases de equivalencia que determina $\Re$ sobre A

7.2) Sea {{m,r,t}, {p,s,u}} una partición del conjunto A determinada por una relación de equivalencia $\Re$.

a) Determinar el conjunto A.

b) Dar por extensión la relación $\Re \subseteq AxA$.

En este período se permitió elegir a los alumnos reglamentados 4 ejercicios de los 7 propuestos.

Este examen fué con material a al vista, pero esto no quiere decir que siempre sea así.