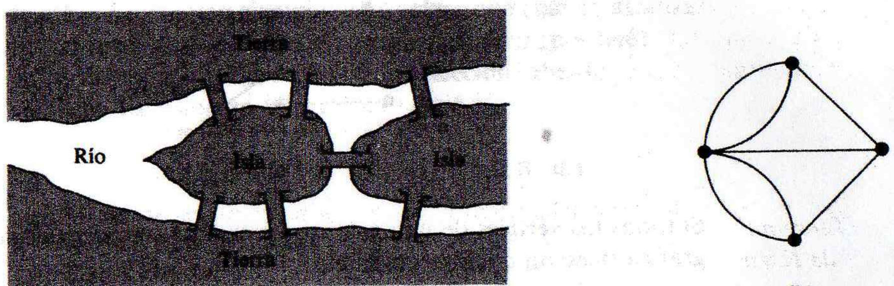
GRAFOS

"Matemática Discreta" Kenneth A. Ross y Charles R.B. Wright

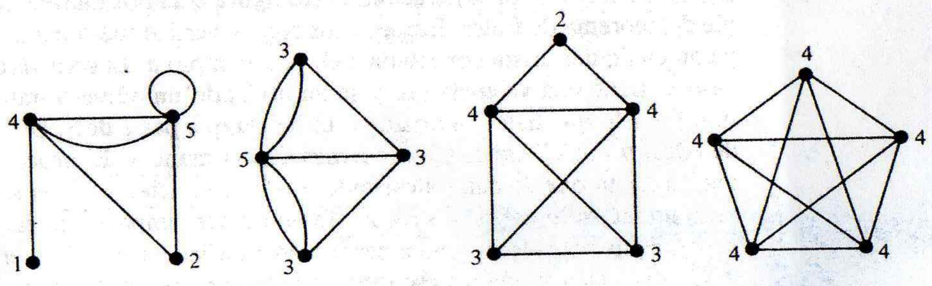
Uno de los problemas más viejos relacionados con la teoría de las gráficas fue el problema de los puentes de Königsberg, que pregunta si es posible dar un paseo en la ciudad mostrada en la figura 5a y regresar al punto de partida cruzando cada puente una sola vez. En 1736 el matemático suizo Leonhard Euler resolvió el problema. Construyó la gráfica de la figura 5b reemplazando la tierra firme por vértices y los puentes por aristas. La pregunta fue entonces: ¿existe un camino cerrado que contenga exactamente cada una de las aristas? Este camino se llama **circuito de Euler** o **euleriano**. Euler demostró que no existe dicho camino para la gráfica de la figura 5b. Para saber por qué, necesitamos un nuevo concepto. La **valencia** de un vértice en una gráfica es el número de aristas que confluyen en él. En la figura 6 indicamos las valencias junto a cada vértice. Nótese que un lazo contribuye con 2 y no con 1, en la valencia del vértice. Euler demostró que una gráfica que tiene un circuito euleriano tiene valencia par en todos sus vértices. Por eso la única gráfica de la figura 6 que puede ser euleriana es la d). ¿Lo es?



(a) (b)

Gráfica de Königsberg

Figura 5



Gráfica de Königsberg

FIGURA 6 (a) (b) (c) (d)

EJERCICIO

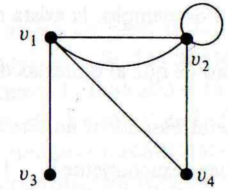
a) Para cada gráfica de la figura calcule
i) La suma de las valencias de todos los vértices;
ii) El número de aristas.

b) Compare las respuestas de la parte a) y elabore una conjetura.

c) Utilice la idea de "borrar aristas" para justificar su conjetura en la parte b).

d) ¿Puede una gráfica tener un número impar de vértices de valencia impar?

GRAFOS



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (b)

Figura 1

Nótese que la matriz **M** contiene toda la información acerca de las conexiones de la gráfica, y se puede conocer la gráfica sin necesidad de dibujarla. Además, podemos obtener información directamente de la matriz. Por ejemplo, existen aristas paralelas, si y sólo si, alguna entrada de la matriz es mayor que la unidad. Los lazos quedan en la diagonal principal; véase la figura 2c. La entrada $\mathbf{M}[2, 2] = 1$ muestra que hay un lazo en v_2. Las otras entradas en la diagonal son 0, por lo tanto no existen más lazos. Si un vértice v_i no tiene lazos, su valencia será la suma de las del i-ésima columna o renglón. Por ejemplo, el vértice v_1 tiene valencia 4, ya que las entradas del primer renglón suman 4. Por último observaremos que la matriz de la gráfica es simétrica respecto a la diagonal principal, ya que $\mathbf{M}[i, j] = \mathbf{M}[j, i]$ para cualquier i, j. Ciertas propiedades de una gráfica no son fáciles de deducir a partir de su matriz [por ejemplo, la existencia de circuitos hamiltonianos], pero en ocasiones seremos capaces de manipular la matriz para conocer las gráficas.

En §0.2 aludimos vagamente las gráficas que son "esencialmente las mismas". No tendremos la noción exacta [la palabra clave será "isomorfismo"], hasta que demos una definición teórica precisa de gráfica en teoría de conjuntos. La segunda observación puede ayudar a dar un sentido a lo que estamos buscando. Dos gráficas son esencialmente iguales [es decir, son "isomorfas"] si sus vértices se pueden ordenar de manera que las matrices SEAN IDÉNTICAS.

$$\begin{array}{cc} & \text{2a. columna} \\ & \downarrow \\ \\ \\ \\ \text{. renglón} \rightarrow & \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cc} & \text{2a. columna} \\ & \downarrow \\ \text{1er. renglón} \rightarrow & \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

M[4, 2] M[1, 2] Diagonal principal

(a) (b) (c)

Figura 2

Con la matriz M^2 de un Grafo se puede saber el número de caminos de longitud 2 entre sus vértices.

En el ejercicio anterior, 6a, hay 3 caminos de longitud 2 entre el vértice 1 y el 2. Puedes señalarlos ?
Hay 6 caminos de longitud 2 entre el vértice 2 y él mismo. Puedes indicarlos ?

Para comprobarlos, vamos a escribir la matriz M del ejercicios 6a y elevarla al cuadrado.
Esto es, hay que multiplicar M * M.

Veamos ahora un repaso de multiplicación de matrices:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}0&2&1&1\\2&1&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0&2&1&1\\2&1&0&1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6&3&0&2\\3&6&2&3\\0&2&1&1\\2&3&1&2\end{bmatrix}\end{array}$$

ejemplo

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}\end{array}$$

multiplicación
de matrices.

$2*2 + 1*1 + 0*0 + 1*1 = 6$

$2*1 + 1*0 + 0*0 + 1*0 = 2$