Integración de funciones racionales mediante separación en fracciones simples

Marcelo Fiori

El objetivo es resolver integrales de la forma: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de coeficientes reales.

Observemos que si $gr(P) > gr(Q)$, entonces podemos escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \text{donde} \quad gr(R(x)) < gr(Q(x))$$

De lo anterior, resulta

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int S(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

El término $\int S(x)dx$ se resuelve fácil (es un polinomio), por lo que nos concentraremos en resolver $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$.

La idea será descomponer la expresión $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en una suma de términos que podamos integrar, llamadas fracciones simples.

Las fracciones simples son expresiones con esta forma: $\frac{A}{(x-r)^k}$; $\frac{Bx+C}{[(x-p)^2+q^2]^k}$ donde los denominadores que aparecen, son los factores de $Q(x)$. Los factores $(x-r)^k$ aparecen si $Q(x)$ tiene una raíz real r. Mientras que los factores $[(x-p)^2+q^2]^k$ aparecen si $Q(x)$ tiene raíces complejas $z = p \pm qi$

Cuando $Q(x)$ tiene una raíz r con multiplicidad k $\Big($o sea $Q(x) = (x-r)^k Q_1(x)\Big)$, aparecen k factores: $(x-r)^i$ con $i = 1 \ldots k$ (ver ejemplo)

Observemos que cuando el factor tiene una raíz real, el numerador es simplemente un número (A), y cuando tiene raíces complejas aparece un polinomio de grado 1 $(Bx+C)$.

Ejemplo: $\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}$

Los factores de $(x-2)^2(x-3)$ son: $(x-2)$, $(x-2)^2$ y $(x-3)$
Por lo tanto descompondremos de la siguiente forma

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-3}$$

Los coeficientes A,B, y C se determinan, por ejemplo, haciendo denominador común y resolviendo el sistema lineal. En este caso para hallar C podríamos multiplicar la ecuación por $(x-3)$ y tomar límite cuando x tiende a 3:

$$\frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{A(x-3)}{x-2} + \frac{B(x-3)}{(x-2)^2} + C$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 3}\Big(\frac{A(x-3)}{x-2} + \frac{B(x-3)}{(x-2)^2} + C\Big) \Rightarrow C = \lim_{x\to 3}\frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{3-1}{(3-2)^2} = 2$$

Este método se conoce como "la tapadita", pero sirve sólo para calcular los coeficientes correspondientes a los términos $(x-r)^k$, donde k es la multiplicidad de la raíz r (en el ejemplo, se puede calcular B de esta manera).

Ejemplo: $\frac{1}{(x-2)(x^2-x+1)}$

El polinomio $x^2 - x + 1$ tiene raíces $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La descomposición quedaría entonces:

$$\frac{1}{(x-2)(x^2-x+1)} = \frac{1}{(x-2)[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]}$$

Ya sabemos separar en fracciones simples, veamos ahora cómo integramos cada una de ellas.

¿Cómo se calcula $\int \frac{Adx}{(x-r)^k}$?

- $k = 1$

$$\int \frac{Adx}{x-r} = A \ln|x-r|$$

- $k > 1$

$$\int \frac{Adx}{(x-r)^k} = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-r)^{k-1}}$$

¿Cómo se calcula $\int \frac{(Bx+C)dx}{[(x-p)^2+q^2]^k}$?

- $k = 1$

  Hagamos algunas cuentas para volver a separar en dos integrales:

$$\begin{aligned} \int \frac{(Bx+C)dx}{(x-p)^2+q^2} &= \int B\frac{(x+\frac{C}{B})dx}{(x-p)^2+q^2} = B\int \frac{(x+\frac{C}{B}-p+p)dx}{(x-p)^2+q^2} \\ &= B\int \frac{(x-p)dx}{(x-p)^2+q^2} + B\int \frac{(\frac{C}{B}+p)dx}{(x-p)^2+q^2} \end{aligned}$$

  La primera sale con el cambio de variable $u = (x-p)^2 + q^2$ (ejercicio).

  En la segunda, buscando que resulte una expresión del estilo de $\frac{1}{x^2+1}$ (que sabemos integrar), primero realizamos el cambio de variable $u = (x-p)$ y luego sacamos q^2 de factor común en el denominador:

$$B(\frac{C}{B}+p)\int \frac{dx}{(x-p)^2+q^2} = (C+Bp)\int \frac{du}{u^2+q^2} = (C+Bp)\int \frac{du}{q^2[(\frac{u}{q})^2+1]}$$

  Luego realizamos un nuevo cambio de variable: $z = \frac{u}{q}$

$$\frac{C+Bp}{q^2}\int \frac{du}{(\frac{u}{q})^2+1} = \frac{C+Bp}{q}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{C+Bp}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)$$

  Finalmente:

$$\int \frac{(Bx+C)dx}{(x-p)^2+q^2} = \frac{B}{2}\ln\left((x-p)^2+q^2\right) + \frac{C+Bp}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right)$$

  Naturalmente, no hay que memorizar este resultado. Basta con entender los pasos y saber realizarlos en un caso particular, como hacemos en el último ejemplo.

- $k > 1$

  Nos limitaremos a contar brevemente como calcularla.

  Mediante el mismo procedimiento que para $k = 1$, debemos llevar la integral a la forma $K\int \frac{dz}{(z^2+1)^k}$:

$$\int \frac{(Bx+C)dx}{[(x-p)^2+q^2]^k} = K\int \frac{dz}{(z^2+1)^k}$$

Donde K es una constante que dependerá de B,C,p,q y k.

Ahora, si definimos I_n de la siguiente forma:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Se puede observar integrando por partes (ejercicio) que:

$$I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$$

Observando que $I_1 = \arctan(x)$, podemos conocer $I_k \ \ \forall k$ dado que conocemos el primero (I_1) y conocemos la relación que nos lleva al I_n desde el I_{n-1}.

Ejemplo 1

Calculemos:

$$\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}dx$$

Llamemos $P(x) = x^4+3x^2+x+1$ y $Q(x) = x^3+x$
Como $gr(P) > gr(Q)$, tenemos que hacer la división.
Resulta: $\frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x} = x + \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}$
Descomponemos entonces la segunda expresión en fracciones simples:

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+x} = \frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Hallemos A,B y C.

$$\frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

de donde $A = B = C = 1$
Por lo tanto:

$$\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}dx = \int xdx + \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx$$

Calculemos la tercer integral.

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

La primera se resuelve con el cambio de variable $u = x^2+1$ y la segunda es directamente $\arctan(x)$. Resulta al final:

$$\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \arctan(x)$$

Ejemplo 2

Calculemos:

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx$$

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx = \int \frac{2x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+x+1}dx$$

Resulta que: $A = 1 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 2$

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{du}{u}$$

Donde hicimos el cambio de variable $u = x^2+x+1$. Por otro lado:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1\right]}$$

Hagamos $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1\right]} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Por lo que finalmente llegamos a:

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}})$$