2) ¿SERÁ T UNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA?

1

EXAMEN 17/2/2011

i) ¿REFLEXIVA? $aTa \iff \frac{a^2-3}{a^2-3} \in \mathbb{Z}$

PERO $\frac{a^2-3}{a^2-3} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{Z}^+ - \{1\} \Rightarrow$ <u>SÍ</u> ✓

PUES $1 \in \mathbb{Z}$

ii) ¿SIMÉTRICA?

$$aTb \Rightarrow bTa \qquad \forall a,b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$$

$$aTb \iff \frac{a^2-3}{b^2-3} \in \mathbb{Z}$$

¿SE PODRÁ LLEGAR A PROBAR?

$$bTa \iff \frac{b^2-3}{a^2-3} \in \mathbb{Z}$$

PENSEMOS UN POCO, SÓLO UN POCO!!
EL NÚMERO 5 ES ENTERO. ¿EL $\frac{1}{5}$ ES ENTERO?

¿CUÁL ES EL ÚNICO NÚMERO ENTERO QUE VERIFICA:
$a \in \mathbb{Z} \iff \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$?

SÍ, EL "ÚNICO" ES EL 1 Y EL −1. ENTONCES SON 2!
CLARO, HAY UN "ÚNICO" EN $\mathbb{Z}^+$, Y <u>NINGUNO</u> EN $\mathbb{Z}^+ - \{1\}$
EL ASUNTO ES QUE LA RELACIÓN T NO ES SIMÉTRICA,
ENTONCES <u>NO</u> ES DE EQUIVALENCIA.

2) b) ¿T SERÁ UNA RELACIÓN DE ORDEN?

2

i) REFLEXIVA : YA VIMOS QUE SI

ii) ANTISIMETRICA : SI

SI $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{a} \notin \mathbb{Z} \quad \forall a \neq 1, a \neq -1$

SI $\frac{a^2-3}{b^2-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b^2-3}{a^2-3} \notin \mathbb{Z} \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ CON $a \neq b$.

DE OTRA FORMA:

SI $\frac{a^2-3}{b^2-3} \in \mathbb{Z}$ Y $\frac{b^2-3}{a^2-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a^2-3}{b^2-3} = 1 \Rightarrow a=b$ ✓

iii) ¿TRANSITIVA?

$\frac{a^2-3}{b^2-3} \in \mathbb{Z}, \frac{b^2-3}{c^2-3} \in \mathbb{Z} \overset{??}{\Rightarrow} ¿\frac{a^2-3}{c^2-3} \in \mathbb{Z}$!?

EL PRODUCTO DE 2 ENTEROS, ES ENTERO.

$\frac{a^2-3}{\cancel{b^2-3}} \cdot \frac{\cancel{b^2-3}}{c^2-3} = \frac{a^2-3}{c^2-3} \in \mathbb{Z}$ ✓

HURRA!! ENTONCES T ES UNA RELACIÓN DE ORDEN.

¿SERÁ DE ORDEN TOTAL? INVESTIGUEMOS:

¿4 T 5? $\frac{4^2-3}{5^2-3} = \frac{16-3}{25-3} = \frac{13}{22} \notin \mathbb{Z}$

ENTONCES 4 NO ESTÁ EN RELACIÓN CON 5.

ENTONCES NO TODOS LOS ELEMENTOS DE $\mathbb{Z}^+ - \{1\}$ ESTÁN RELACIONADOS $\Rightarrow$ ES UNA RELACIÓN DE ORDEN $\boxed{\text{PARCIAL.}}$

3) i) ¿SOBREYECTIVA? $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

3

$¿\forall y \in Z, \exists x \in A / f(x) = y?$

DADO y, VAMOS A AVERIGUAR SI EXISTE x.
POR EJEMPLO, $¿\exists x / f(x) = 7?$

$$\frac{x-2}{x-3} = 7 \iff x-2 = 7(x-3) \iff x-2 = 7x-21$$
$$19 = 6x$$
$$\frac{19}{6} = x$$

CLARO, EL "7" FUE SÓLO UN EJEMPLO
VAMOS A HACERLO EN GENERAL.

$$\frac{x-2}{x-3} = y \iff x-2 = y(x-3) \iff x-2 = xy-3y$$
$$x - xy = -3y+2$$
$$x(1-y) = -3y+2$$
$$x = \frac{-3y+2}{1-y}$$

ENTONCES, ¿CUALQUIERA QUE SEA y SIEMPRE VA A EXISTIR x TAL QUE $f(x)=y$?
$y \in Z$ $x \in A$

RESPUESTA: NO!! LA EXPRESIÓN ANALÍTICA DE x TIENE UN DENOMINADOR. SI FUERA $y=1$, $\nexists x$.

ENTONCES EL NÚMERO 1 NO TIENE CORRESPONDIENTE.
ENTONCES f NO ES SOBREYECTIVA

3) i) INYECTIVA $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ 4

USAREMOS EL CONTRARRECÍPROCO.

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{x'-2}{x'-3} \Leftrightarrow (x-2)(x'-3) = (x-3)(x'-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{xx'} - 3x - 2x' + \cancel{6} = \cancel{xx'} - 2x - 3x' + \cancel{6}$$

APLICAMOS LA PROPIEDAD CANCELATIVA

ENTONCES:

$$-3x - 2x' = -2x - 3x'$$

$$3x' - 2x' = -2x + 3x$$

$$x' = x \quad \checkmark$$

HURRA!!

iii) EXPRESIÓN DE LA INVERSA:

YA LO HICIMOS: $x = \dfrac{-3y+2}{1-y}$

DOMINIO DE LA FUNCIÓN INVERSA: $\mathbb{Z} - \{1\}$

RECORRIDO " " " $= \left\{ x / x \in \mathbb{R},\ x = \dfrac{-3y+2}{1-y},\ y \in \mathbb{Z} - \{1\} \right\}$

ACLARACIÓN: $f: A \to \mathbb{Z}$

NO SE PIDE AVERIGUAR Ó EXPRESAR EL CONJUNTO A.
