

Examen de Matemática I - 19 de setiembre de 2011

**Notas:** Todas las funciones auxiliares utilizadas por el alumno deben ser definidas previamente.

Ejercicio 1

- Dados los conjuntos  $A = \{-1, 1, 2\}$  y  $B = \{2, -3\}$ , hallar el conjunto  $X$  con mayor cantidad de elementos que cumpla simultáneamente con:  $X \subseteq A \cup B$ ,  $X - A = \{-3\}$  y  $X \cap A \cap B \neq \emptyset$ . Justificar.
- Analizar la veracidad de las siguientes propiedades sobre subconjuntos de  $N$ , en caso afirmativo demostrarlas y en caso contrario dar un contraejemplo:
  - $(\#A \leq \#B) \wedge B \subseteq A \rightarrow \#A = \#B$
  - $A - (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cup C)}$
  - Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , si  $(B - \bar{A})$  es un conjunto finito, entonces es  $A$  finito.

Ejercicio 2

Sea  $A = \{f: Z \rightarrow Z / f \text{ es una función total}\}$ , se define una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  de la siguiente forma  $\forall f, g \in A: f R g \leftrightarrow (f 0) = (g 0)$

- Demostrar que  $R$  es una relación de equivalencia.
- Siendo  $h \in A / (h x) = x^2 + 3$ , probar que  $p \in A / (p x) = -4x + 3$  pertenece a  $[h]$ .
- Hallar los tipos y las expresiones para  $(h (p x))$  y  $(p (h x))$ .

Ejercicio 3

Sean  $D(a)$  y  $M^*(a)$  el conjunto de los **divisores** y de los **múltiplos** de cierto número  $a \in N^*$  respectivamente. Ejemplo  $D(10) = \{1, 2, 5, 10\}$  y  $M^*(3) = \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\} = \{x \in N^* / x = 3\}$ . Definimos sobre  $N^*$  una relación  $S$  tal que  $\forall a, b \in N^*: a S b \leftrightarrow a \in D(b)$ .

- Demostrar que  $S$  es una relación de orden y caracterizarla como "orden parcial o total".
- Analizar la situación si en lugar de  $D(a)$  consideramos  $M^*(a)$ , es decir que definimos sobre  $N^*$  una nueva relación  $T$  tal que  $\forall a, b \in N^*: a T b \leftrightarrow a \in M^*(b)$ .

Ejercicio 4

- Dado  $a \in N^*$ , definimos una función  $f: D(a) \rightarrow M^*(a) \rightarrow N^*$  tal que  $(f x y) = \frac{y}{x}$ 
  - Analizar Inyectividad y sobreyectividad, decidiendo así sobre la Biyectividad.
  - Analizar si la función es parcial (en este caso indicar dominio de definición) o total.
- Sea  $f: A \rightarrow B$  una función, y sean  $X, Y \subseteq A$  demuestra que:  $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$   
**Nota:** Si  $X$  es un subconjunto de  $A$ , entonces  $f(X) = \{f(a) / a \in X\}$ .

Ejercicio 5

Definir una función **subLista** que decida si una lista es una sub-lista de otra.

Ejemplos: `subLista [5, 0, -2] [1, 4, 8, 5, 0, -2, 7, 9] = True`  
`subLista [1, 2, 3] [1, 4, 2, 3, 0, -2, 7, 9] = False`

Ejercicio 6

- Definir una función **divisores** de tipo  $(Int \rightarrow [Int])$  que dado un entero no negativo, devuelve una lista con sus divisores (no negativos). Ej.: `divisores 8 = [1, 2, 4, 8]`
- Definir una función **mcd** de tipo  $(Int \rightarrow Int \rightarrow Int)$  que dados dos enteros (no negativos) devuelve su máximo común divisor.

Ejercicio 7

Considerando la definición habitual de la función `larg`:  $(list A) \rightarrow Int$  y utilizando Inducción estructural demostrar que:  $\forall l, m \in (list A)$ :

Si `subLista l m = True` entonces `larg l ≤ larg m`