Ejercicios del libro : "Matemática Discreta" de Kenneth H. Rosen, quinta edición. Mc Graw-Hill, en español.

Teorema 2:

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto S. Entonces las clases de equivalencia de R forman una partición de S.

Reciprocamente, dada una partición del conjunto S, hay una relación de equivalencia cuyas clases de equivalencia son los conjuntos que forman la partición.

Las clases de congruencia módulo m proporcionan una ilustración muy útil del Teorema 2. Hay m clases distintas de congruencia módulo m correspondientes a los m distintos restos posibles al dividir un número entero por m. Estas clases de congruencia se denotan por $[0]_m$, $[1]_m$, ..., $[m-1]_m$ y forman una partición del conjunto de los números enteros.

EJEMPLO 9 ¿Cuáles son los conjuntos de la partición de los números enteros que resultan de la congruencia módulo 4?

Congruencia módulo 4: ¿Cuáles son los posibles restos de dividir un número entero entre 4? Respuesta: 0, 1, 2 y 3.

Solución: Hay cuatro clases de congruencia, correspondientes a $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ y $[3]_4$. Son los conjuntos

Más ejercicios: http://www.mhhe.com/rosen (en inglés)

$$[0]_4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$$
$$[1]_4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$$
$$[2]_4 = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$$
$$[3]_4 = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$$

Estas clases de congruencia son disjuntas y cada número entero está en exactamente una de ellas. En otras palabras, como dice el Teorema 2, estas clases de congruencia forman una partición. ◀

Problemas

1. ¿Cuáles de estas relaciones en $\{0, 1, 2, 3\}$ son relaciones de equivalencia? Determina las propiedades que les faltan a las restantes para ser relación de equivalencia.

a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

2. ¿Cuáles de estas relaciones en el conjunto de todas las personas son relaciones de equivalencia? Determina las propiedades de una relación de equivalencia que les faltan a las restantes.

a) $\{(a, b) \mid a$ y b tienen la misma edad$\}$
b) $\{(a, b) \mid a$ y b tienen los mismos padres$\}$
c) $\{(a, b) \mid a$ y b tienen uno de los padres en común$\}$
d) $\{(a, b) \mid a$ y b se conocen$\}$
e) $\{(a, b) \mid a$ y b hablan un mismo idioma$\}$

3. ¿Cuáles de estas relaciones en el conjunto de todas las funciones de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$ son relaciones de equivalencia? Determina las propiedades de una relación de equivalencia que les faltan a las restantes.

a) $\{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$
b) $\{(f, g) \mid f(0) = g(0)$ o $f(1) = g(1)\}$
c) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbf{Z}\}$
d) $\{(f, g) \mid f(x) - g(x) = C$ para algún $C \in \mathbf{Z}$ y para todo $x \in \mathbf{Z}\}$
d) $\{(f, g) \mid f(0) = g(1)$ y $f(1) = g(0)\}$

4. Define tres relaciones de equivalencia en el conjunto de estudiantes de tu curso de matemática discreta que sean distintas de las relaciones discutidas en el texto. Determina las clases de equivalencia para estas relaciones de equivalencia.

5. Supón que A es un conjunto no vacío y que f es una función cuyo dominio es A. Sea R la relación en A que consiste en todos los pares ordenados (x, y) con $f(x) = f(y)$.

a) Demuestra que R es una relación de equivalencia en A.
b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de R?

6. Supón que A es un conjunto no vacío y que R es una relación de equivalencia en A. Demuestra que hay una función f cuyo dominio es A tal que $(x, y) \in R$ si, y sólo si, $f(x) = f(y)$.

7. Demuestra que la relación R, que consiste en todos los pares (x, y) en los que x e y son cadenas de bits de longitud al menos tres que coinciden en sus tres primeros bits, es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud al menos tres.

8. Demuestra que la relación R, que consiste en todos los pares (x, y) en los que x e y son cadenas de bits de longitud al menos tres que coinciden salvo quizá en sus tres primeros bits, es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud al menos tres.

9. Demuestra que la equivalencia proposicional es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las fórmulas proposicionales.

10. Sea R la relación en el conjunto de pares ordenados de enteros positivos tal que $((a, b), (c, d)) \in R$ si, y sólo si, $ad = bc$. Demuestra que R es una relación de equivalencia.

Ejercicios del libro : "Matemática Discreta" de Kenneth H. Rosen, quinta edición.
Mc Graw-Hill, en español.

12. (Requiere Cálculo)

a) Sea n un entero positivo. Demuestra que la relación R en el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales que consiste en todos los pares (f, g) con $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x)$, es una relación de equivalencia [$f^{(n)}(x)$ es la derivada n-ésima de $f(x)$].

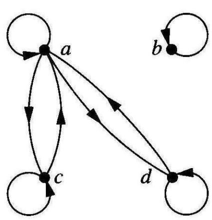
b) ¿Qué funciones están en la misma clase de equivalencia que la función $f(x) = x^4$ cuando $n = 3$?

13. Sea R la relación en el conjunto de todas las URLs (o direcciones web) tal que $x\ R\ y$ si, y sólo si, la página web en la dirección x es la misma que la página web en la dirección y. Demuestra que R es una relación de equivalencia.

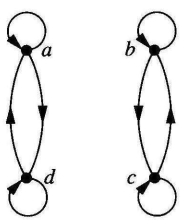
14. Sea R la relación en el conjunto de todas las personas que han visitado una página web en concreto tal que $x\ R\ y$ si, y sólo si, la persona x y la persona y han seguido el mismo conjunto de enlaces a partir de esta página web (yendo de una página web a otra hasta que se desconectan de Internet). Demuestra que R es una relación de equivalencia.

En los Problemas 15-17, determina si la relación cuyo grafo dirigido se muestra en la figura es o no una relación de equivalencia.

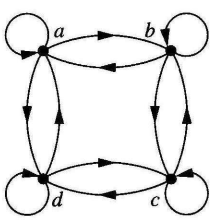
15.



16.



17.



18. Determina si las relaciones representadas por estas matrices booleanas son relaciones de equivalencia.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. Demuestra que la relación R en el conjunto de todas las cadenas de bits tal que $s\ R\ t$ si, y sólo si, s y t contienen el mismo número de unos es una relación de equivalencia.

20. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia del Problema 1?

21. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia del Problema 2?

22. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de las relaciones de equivalencia del Problema 3?

23. ¿Cuál es la clase de equivalencia de la cadena de bits 011 para la relación de equivalencia del Problema 19?

24. ¿Cuáles son las clases de equivalencia de estas cadenas de bits para la relación de equivalencia del Problema 7?

a) 010 **b)** 1011 **c)** 11111 **d)** 01010101

25. Describe las clases de equivalencia de las cadenas de bits del Problema 24 para la relación de equivalencia del Problema 8.

26. ¿Cuál es la clase de congruencia $[4]_m$ si m es

a) 2? **b)** 3? **c)** 6? **d)** 8?

27. Describe cada una de las clases de congruencia módulo 6.

28. **a)** ¿Cuál es la clase de equivalencia de (1, 2) con respecto a la relación de equivalencia del Problema 10?

b) Da una interpretación de las clases de equivalencia de la relación de equivalencia R del Problema 10.

29. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

a) $\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}$
b) $\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}$
c) $\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$
d) $\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}$

30. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones de $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$?

a) $\{-3, -1, 1, 3\}, \{-2, 0, 2\}$
b) $\{-3. -2, -1, 0\}, \{0, 1, 2, 3\}$
c) $\{-3, 3\}, \{-2, 2\}, \{-1, 1\}, \{0\}$
d) $\{-3, -2, 2, 3\}, \{-1, 1\}$

31. ¿Cuáles de estas colecciones de subconjuntos son particiones del conjunto de cadenas de bits de longitud 8?

a) El conjunto de cadenas de bits que empiezan por 1, el conjunto de cadenas de bits que empiezan por 00 y el conjunto de cadenas de bits que empiezan por 01.

b) El conjunto de cadenas de bits que contienen la cadena 00, el conjunto de cadenas de bits que contienen la cadena 01, el conjunto de cadenas de bits que contienen la cadena 10 y el conjunto de cadenas de bits que contienen la cadena 11.

c) El conjunto de cadenas de bits que terminan en 00, el conjunto de cadenas de bits que terminan en 01, el conjunto de cadenas de bits que terminan en 10 y el conjunto de cadenas de bits que terminan en 11.

d) El conjunto de cadenas de bits que terminan en 111, el conjunto de cadenas de bits que terminan en 011 y el conjunto de cadenas de bits que terminan en 00.