**Ejercicios con sus soluciones.**

Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^{n+1}}\, dx$ para cada $n \in \mathbf{N}^*$.

(Se sugiere hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} x + \cos x$

y recordar que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ).

**Resolución:**

Haciendo la sustitución $u = \operatorname{sen} x + \cos x$ resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^{n+1}}\, dx = \int_1^{\sqrt{2}} u^{-n-1}\, du = \left.\frac{u^{-n}}{-n}\right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2^{-\frac{n}{2}} - 1}{-n},\ \forall n \geq 1$$

---

Sean $f : f(t) = \dfrac{1}{(t + 4\sqrt{t} + 4).\sqrt{t}}$ $(t > 0)$ y $F : F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt$ $(x > 0)$

a) *(7 puntos)* Calcular $F(x)$.

b) *(3 puntos)* Hallar $a > 1$ de modo que el área de la región $R(f, [1, a])$ valga $\frac{1}{3}$.

## *Solucion*

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{(t + 4\sqrt{t} + 4).\sqrt{t}}\, dt$, haciendo el cambio $u = \sqrt{t}$ resulta que

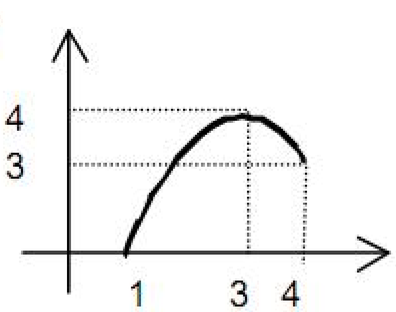
$$F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2}{u^2 + 4u + 4}\, du = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2}{(u+2)^2}\, du = -\left.\frac{2}{u+2}\right|_1^{\sqrt{x}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

b) área( $R(f, [1, a])$ ) $= F(a) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{a} + 2} = \dfrac{1}{3}$ de lo que deduce que $a = 16$

---

Sea $f : [1, 4] \to \mathbf{R}$ continua, $F : [1, 4] \to \mathbf{R}$ / $F(x) = \displaystyle\int_1^x f$

y el gráfico de $F$ es el de la figura.




Entonces:

| | |
|---|---|
| **(1)** Existe $c \in (1, 4)$ / $f(c) < 0$ | **(2)** $f(x) \leq 0$ para todo $x \in (1, 4)$ |
| **(3)** no existe $c \in (1, 4)$ / $f(c) = 0$ | **(4)** $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (1, 4)$ |

| | |
|---|---|
| **1** | × |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |

***respuesta***

***Estos son ejercicios de examenes de la facultad de Ciencias Económicas.***