

## Derivabilidad

**Definición:** Cociente incremental.

Sea  $f$  una función real y  $[a, b]$  un intervalo en el cual  $f$  está definida. Llamamos cociente incremental

de  $f$  en  $[a, b]$  al cociente:  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  o  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Interpretación geométrica:  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \alpha$ . Es la pendiente de la recta secante al gráfico de  $f$  en los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  (Representa gráficamente)

**Definición:** Derivada en un punto

Sea  $f: I \rightarrow R$ ,  $a$  un punto interior de  $I$ . Decimos que  $f$  es derivable en  $x = a \Leftrightarrow$  existe el límite del cociente incremental cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y es finito.

Es decir:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$  Existe y es un número real.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$  y  $f'(a) \in R$

**Definición:** Recta tangente

Sea  $f$  es derivable en  $x = a$ , llamamos recta tangente al gráfico de  $f$  en  $x = a$ , a la recta de ecuación:  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$  o  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

**Teorema:**

**H)**  $f$  es derivable en  $x = a$

**T)**  $f$  es continua en  $x = a$

Demostración:

Entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$  es continua en  $x = a$

¿Se cumple el recíproco?

**Definición:** Función derivada. Consideramos la función que asocia a cada punto  $x$ , el valor de la

derivada en ese punto.  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

## Álgebra de derivadas:

Derivada de una suma:

**H)**  $f$  es derivable en  $x = a$

$g$  es derivable en  $x = a$

**T)**  $(f + g)$  es derivable en  $x = a$  y además  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

**Derivada del producto con una constante:****H)**  $f$  es derivable en  $x = a$ ,  $k \in \mathbb{R}$ **T)**  $(k \cdot f)$  es derivable en  $x = a$  y además  $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$ **Derivada del producto de funciones:****H)**  $f$  es derivable en  $x = a$  $g$  es derivable en  $x = a$ **T)**  $(f \cdot g)$  es derivable en  $x = a$  y además  $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ **Derivada de la función  $\frac{1}{f}$** **H)**  $f$  es derivable en  $x = a$ ,  $f(a) \neq 0$ **T)**  $\left(\frac{1}{f}\right)$  es derivable en  $x = a$  y  $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$ **Derivada del cociente de funciones:****H)**  $f$  es derivable en  $x = a$  $g$  es derivable en  $x = a$ ,  $g(a) \neq 0$ **T)**  $\left(\frac{f}{g}\right)$  es derivable en  $x = a$  y además  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$ **Derivada de la función compuesta (regla de la cadena):****H)**  $f$  es derivable en  $x = a$  $g$  es derivable en  $f(a)$  $\exists (g \circ f)$ **T)**  $(g \circ f)$  es derivable en  $x = a$  y además  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ **Definiciones:**➤  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int}X$  $f$  estrictamente creciente en " $a$ "  $\Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$ ,  $\begin{cases} x < a, & f(x) < f(a) \\ x > a, & f(x) > f(a) \end{cases}$ 

$$\Leftrightarrow \forall x \in E^*(a), \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

➤  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int}X$  $f$  estrictamente decreciente en " $a$ "  $\Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$ ,  $\begin{cases} x < a, & f(x) > f(a) \\ x > a, & f(x) < f(a) \end{cases}$ 

$$\Leftrightarrow \forall x \in E^*(a), \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

➤ Decimos que  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int}X$  presenta un máximo relativo en " $a$ "  $\Leftrightarrow \exists E(a)$  tal que  $\forall x \in E(a)$ ,  $f(x) \leq f(a)$ ➤ Decimos que  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int}X$  presenta un mínimo relativo en " $a$ "  $\Leftrightarrow \exists E(a)$  tal que  $\forall x \in E(a)$ ,  $f(x) \geq f(a)$

**Teorema: Condición suficiente de crecimiento.****H)**  $f$  es derivable en  $x = a$ 

$$f'(a) > 0$$

**T)**  $f$  es estrictamente creciente en  $x = a$ 

Demostración:

Como  $f$  es derivable en  $x = a$  entonces  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0 \Rightarrow$  (por teorema deconservación del signo)  $\exists E(a) / \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow$ 

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \in E^+(a) \Rightarrow \underline{x > a} \Rightarrow x - a > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow \underline{f(x) > f(a)} \\ \text{si } x \in E^-(a) \Rightarrow \underline{x < a} \Rightarrow x - a < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow \underline{f(x) < f(a)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

 $f$  es estrictamente creciente en  $x = a$ 

Observación: El recíproco NO se cumple.

**Teorema: Condición necesaria de extremo relativo.** (Teorema de Fermat)**H)**  $f$  es derivable en  $x = a$  $f$  presenta un extremo relativo en  $x = a$ **T)**  $f'(a) = 0$ 

Demostración: (por absurdo)

Si fuera

 $f'(a) > 0 \Rightarrow f$  crece estrictamente en  $x = a \Rightarrow f$  no tendría extremo en  $x = a$  (Aburdo: contradice la H) $f'(a) < 0 \Rightarrow f$  decrece estrictamente en  $x = a \Rightarrow f$  no tendría extremo en  $x = a$  (Aburdo: contradice la H)

$$\Rightarrow f'(a) = 0$$

**Observación:** la condición no es suficiente.  $f(x) = x^3$  es derivable en  $x = 0$  y  $f'(0) = 0$  sin embargo no tiene extremo en  $x = 0$ **Teorema de Rolle:****H)**  $f$  es continua en  $[a, b]$  $f$  es derivable en  $(a, b)$ 

$$f(a) = f(b)$$

**T)**  $\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$

Demostración:  $f$  es continua en  $[a,b]$  entonces (por Weierstrass)  $f([a,b])$  tiene máximo y mínimo en el intervalo. Consideramos tres casos:

1)  $M = m \Rightarrow f$  es constante  $\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

2)  $M \neq m$  pero uno de ellos dos igual a  $f(a) = f(b)$

Supongamos  $M = f(a) = f(b) \Rightarrow$  (por teorema Darboux)  $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = m$

$$\left. \begin{array}{l} m = f(c) \text{ m\u00ednimo absoluto y } c \in (a,b) \\ \text{y como } f \text{ es derivable} \end{array} \right\} \Rightarrow (\text{Fermat}) f'(c) = 0$$

3)  $f(a) \neq M \neq m$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists c_1 \in (a,b) / f(c_1) = M \Rightarrow f'(c_1) = 0 \\ \exists c_2 \in (a,b) / f(c_2) = m \Rightarrow f'(c_2) = 0 \end{array} \right.$$

### Teorema del valor medio (Lagrange):

**H)**  $f$  es continua en  $[a,b]$

$f$  es derivable en  $(a,b)$

**T)**  $\exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  (esto significa que existe un punto cuya tangente tiene la misma pendiente que la recta que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ )

Demostraci\u00f3n:

Consideramos una funci\u00f3n auxiliar  $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} / \varphi(x) = f(x) - hx$ , con  $h$  de modo que  $\varphi(a) = \varphi(b)$

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow f(a) - ha = f(b) - hb \Leftrightarrow f(a) - f(b) = h(a - b) \Leftrightarrow h = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Esta funci\u00f3n  $\varphi$  verifica las hip\u00f3tesis del teorema de Rolle

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) / \varphi'(c) = 0 \text{ y } \varphi'(c) = f'(c) - h = 0 \Leftrightarrow h = f'(c) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

---

Derivada primera:

El estudio del signo de la derivada primera de una funci\u00f3n ( $f'(x)$ ) nos permite determinar:

- ✓ Los intervalos de crecimiento (decrecimiento)
- ✓ Las abscisas de los extremos relativos. (Donde  $f$  es continua y  $f'$  cambia de signo)
- ✓ Las abscisas de los puntos singulares ( $f$  es continua en  $a$ , pero no derivable)
- ✓ Las tangentes y semitangentes en los puntos que corresponda.