

Solución - Primer Examen Parcial de Matemática I - 15 de julio del 2011

Ejercicio 1

Dados tres conjuntos A , B y C , analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdaderas, demostrarlas. En caso de ser falsas dar un contraejemplo.

- a) $A \cap C = B \cap C \rightarrow A = B$
- b) $A - \bar{B} = A \cap B$

Ejercicio 2

- a) Se define la relación $R \subseteq Z \times Z$ tal que $\forall a, b \in Z : a R b \leftrightarrow a - b = 3$
 - i) Probar que R es una relación de equivalencia.
 - ii) Hallar $[0]$, $[1]$ y $[2]$, y el conjunto cociente Z/R . Justificar.

- b) Se define $S \subseteq N^* \times N^*$ tal que $\forall a, b \in N^* : a R b \leftrightarrow a|b$ (a divide b)
Demostrar que S es de orden parcial.

Nota: decimos que $a|b$ (a divide b) si $\exists k \in N / a.k = b$

Ejercicio 3

- a) Sea $f: Z \rightarrow Z$ tal que $(f x) = -(x + 3)$
 - i) Analizar inyectividad y sobreyectividad de f . Hallar la expresión analítica de f^{-1} .
 - ii) Sea $g: Z \rightarrow Z / (g x) = x^2$, dar la expresión para $(g \circ f)$.
- b) Sea $h: Z \rightarrow Z \rightarrow Z$ tal que $(h x y) = x^2 + y^2$
 - i) Dar la expresión para $(h (-2))$
 - ii) Sea $p = (h (-2))$, calcular $(p 0)$
 - iii) ¿Es h una función parcial o total?. Justificar.

Ejercicio 4

Sean: $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$, $h: A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A$, $j: (B \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow B$, $x: A$, $y: B$

Analizar cuáles de las siguientes expresiones son correctas, es decir, tienen tipo y cuáles no tienen tipo. En los casos que son correctos indicar el tipo de la expresión y si no es correcta justificar.

1. $f x$	5. $g (f y)$	9. $h x f$
2. $g y$	6. $j g$	10. $h (g y) (j g)$
3. $f (g y)$	7. $j g (g y)$	11. $h (f x)$
4. $j f x$	8. $h x g$	

Ejercicio 1

- a) $A \cap C = B \cap C \rightarrow A = B$ es falso, ya que si consideramos a modo de contraejemplo $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ y $C = \{-2,3,4,10\}$, se observa que $A \cap C = B \cap C = \{3,4\}$ pero claramente $A \neq B$.
- b) $A - \bar{B} = A \cap B$, es verdadero ya que
 dado $x \in (A - \bar{B}) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin \bar{B}) \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \leftrightarrow x \in (A \cap B)$

Ejercicio 2

- a) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $\forall a, b \in \mathbb{Z} : a R b \leftrightarrow a - b = \dot{3}$
- Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z} : a R a \leftrightarrow a - a = 0 = \dot{3}$, trivial pues 0 es múltiplo de cualquier entero.
 - Simétrica: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \text{Si } a R b \rightarrow b R a$
 $a R b \leftrightarrow a - b = \dot{3} \leftrightarrow b - a = \dot{3} \leftrightarrow b R a$
 - Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : \text{Si } a R b \wedge b R c \rightarrow a R c$
 $\left. \begin{array}{l} a R b \leftrightarrow a - b = \dot{3} \\ b R c \leftrightarrow b - c = \dot{3} \end{array} \right\} \Rightarrow (a - b) + (b - c) = \dot{3} + \dot{3} \leftrightarrow a - c = \dot{3} \leftrightarrow a R c$

La relación R es de equivalencia:

$$\begin{aligned} [0] &= \{a \in \mathbb{Z} / a R 0\} = \{a \in \mathbb{Z} / a - 0 = \dot{3}\} = \{a \in \mathbb{Z} / a = \dot{3}\} = [3] = [6] = [9] = [12] = \dots \\ [1] &= \{a \in \mathbb{Z} / a R 1\} = \{a \in \mathbb{Z} / a - 1 = \dot{3}\} = \{a \in \mathbb{Z} / a = \dot{3} + 1\} = [4] = [7] = [10] = \dots \\ [2] &= \{a \in \mathbb{Z} / a R 2\} = \{a \in \mathbb{Z} / a - 2 = \dot{3}\} = \{a \in \mathbb{Z} / a = \dot{3} + 2\} = [5] = [8] = [11] = \dots \end{aligned}$$

$$\mathbb{Z}/R = \{[a] \in P(\mathbb{Z}) / a \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2]\}$$

- b) $S \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tal que $\forall a, b \in \mathbb{N}^* : a R b \leftrightarrow a|b$ (a divide b)
- Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{N}^* : a R a \leftrightarrow a|a$, trivial pues a divide a para cualquier natural excepto el 0
 - Antisimétrica: $\forall a, b \in \mathbb{N}^* : \text{Si } a R b \wedge b R a \rightarrow a = b$
 $\left. \begin{array}{l} a R b \leftrightarrow a|b \rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / a.k = b \\ b R a \leftrightarrow b|a \rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^* / b.p = a \end{array} \right\} \Rightarrow p.k = 1 \rightarrow p = k = 1 \rightarrow a = b$
 - Transitiva: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^* : \text{Si } a R b \wedge b R c \rightarrow a R c$
 $\left. \begin{array}{l} a R b \leftrightarrow a|b \rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* / a.k = b \\ b R c \leftrightarrow b|c \rightarrow \exists p \in \mathbb{N}^* / b.p = c \end{array} \right\} \Rightarrow a.k.p = b.p = c \rightarrow \exists t = (k.p) \in \mathbb{N}^* / a.t = c$
 $a.t = c \rightarrow a|c \rightarrow a R c$

Con estas tres propiedades demostramos que es e orden.-

Para demostrar que S es de orden parcial, debemos probar que $\exists a, b \in \mathbb{N}^* / (a, b) \notin R \wedge (b, a) \notin R$

Si consideramos dos números primos por ejemplo 7 y 23, concluimos que $(7, 23) \notin R \wedge (23, 7) \notin R$, por lo tanto S es de orden parcial.

Ejercicio 3

a) Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $(f x) = -(x + 3)$

i) Analizar inyectividad y sobreyectividad de f . Hallar la expresión analítica de f^{-1} .

Inyectividad: $(f a) = (f b) \leftrightarrow -(a + 3) = -(b + 3) \leftrightarrow a + 3 = b + 3 \leftrightarrow a = b$ por lo tanto f es inyectiva.

Sobreyectividad: $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z} / (f x) = y$?

$$(f x) = y \leftrightarrow y = -(x + 3) \leftrightarrow x = -y - 3 \leftrightarrow x = -(y + 3)$$

$y \in \mathbb{Z} \rightarrow -(y + 3) \in \mathbb{Z}$, por lo tanto f es sobreyectiva.

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ tal que } (f^{-1} y) = -(y + 3)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f x) = f^{-1}(-(x + 3)) = -(-x + 3) + 3 = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1} y) = f(-(y + 3)) = -(-(y + 3) + 3) = y$$

ii) Sea $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} / (g x) = x^2$, dar la expresión para $(g \circ f)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f x) = g(-(x + 3)) = (x + 3)^2$$

b) Sea $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $(h x y) = x^2 + y^2$

i) Dar la expresión para $(h(-2))$, $(h(-2) y) = (-2)^2 + y^2 = 4 + y^2$

ii) Sea $p = (h(-2))$, calcular $(p 0)$,

$$p y = (h(-2) y) = 4 + y^2 \rightarrow (p 0) = 4 + 0^2 = 4$$

iii) ¿Es h una función parcial o total?. Justificar.

h es una función total ya que todo par de enteros tiene imagen a través de h .

Ejercicio 4

Sean: $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$, $h: A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A$, $j: (B \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow B$, $x: A$, $y: B$

1. $f x$	5. $g(f y)$	9. $h x f$
2. $g y$	6. $j g$	10. $h(g y)(j g)$
3. $f(g y)$	7. $j g(g y)$	11. $h(f x)$
4. $j f x$	8. $h x g$	

$$1. \left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ x: A \end{array} \right\} \rightarrow (f \ x): B$$

$$2. \left. \begin{array}{l} g: B \rightarrow A \\ y: B \end{array} \right\} \rightarrow (g \ y): A$$

$$3. \left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ (g \ y): A \end{array} \right\} \rightarrow f (g \ y): B$$

$$4. \left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ x: A \\ j: (B \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow B \end{array} \right\} \rightarrow (j \ f \ x)$$

No tiene tipo ya que j recibe en primer lugar un argumento de tipo $(B \rightarrow A)$

$$5. \left. \begin{array}{l} f: A \rightarrow B \\ y: B \\ g: B \rightarrow A \end{array} \right\} \rightarrow (f \ y) \text{ no tiene tipo} \left. \right\} \rightarrow g (f \ y) \text{ no tiene tipo}$$

$$6. \left. \begin{array}{l} g: B \rightarrow A \\ j: (B \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow B \end{array} \right\} \rightarrow (j \ g): A \rightarrow B$$

$$7. \left. \begin{array}{l} g: B \rightarrow A \\ j: (B \rightarrow A) \rightarrow A \rightarrow B \\ (g \ y): A \end{array} \right\} \rightarrow (j \ g \ (g \ y)): B$$

$$8. \left. \begin{array}{l} h: A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \\ x: A \\ g: B \rightarrow A \end{array} \right\} \rightarrow (h \ x \ g)$$

No tiene tipo ya que h recibe en segundo lugar un argumento de tipo $(A \rightarrow B)$

$$9. \left. \begin{array}{l} h: A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \\ x: A \\ f: A \rightarrow B \end{array} \right\} \rightarrow (h \ x \ f): A$$

$$10. \left. \begin{array}{l} h: A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \\ (g \ y): A \\ (j \ g): A \rightarrow B \end{array} \right\} \rightarrow (h \ (g \ y) \ (j \ g)): A$$

$$11. \left. \begin{array}{l} h: A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \\ (f \ x): B \end{array} \right\} \rightarrow (h \ (f \ x))$$

No tiene tipo ya que h recibe en primer lugar un argumento de tipo A.