Profesorado de Informática - Ciencias de la Computación - INET - DFPD
Primera Prueba Parcial Matemática II 2010

El parcial es sin material a la vista. Se puede tener sólo una hoja con anotaciones y fórmulas.

1) a) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a: $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=2 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$

b) Resolver el sistema anterior para $a=0$

2) Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Halla si es posible A^{-1}.

b) Resolver la ecuación matricial $AX+B=C$ siendo A la matriz de la parte anterior,

$B=\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

3) a) Resolver la ecuación en diferencias $\boxed{a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}, n\geq 2}$ con las condiciones iniciales: $\boxed{a_0=1 \quad y \quad a_1=1}$

b) Calcular a_{10}.

4) a) Sean

$(a_n): a_n=3-\dfrac{1}{2n-1}$

$(b_n): b_n=3+\dfrac{1}{2n+1}$

Investiga si $((a_n),(b_n))$ es un PSMC.

b) Demuestra que $\lim c_n=1$ siendo $c_n=\dfrac{3^n+2}{3^n}$.

Soluciones:

1) a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2$ $\qquad -a^2 + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \;\; o \;\; a = 2$

Si $\begin{matrix} a = 1 \Rightarrow SI \\ a = 2 \Rightarrow SCI \end{matrix}$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad |A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \Rightarrow \; x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad \Rightarrow \; y = \frac{|A_y|}{|A|} = -2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \; z = \frac{|A_z|}{|A|} = -1$$

2) a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $AX + B = C \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$ Siendo A^{-1} la hallada en la parte anterior. Entonces

$X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -8 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3) a) $\boxed{a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n \geq 2}$ $\qquad \begin{matrix} a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0 \\ r^2 - r - 2 = 0 \;\Rightarrow r_1 = 2 \;, r_2 = -1 \end{matrix}$

Entonces $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n$. Usando ahora las condiciones iniciales obtenemos:

$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \;\; y \;\; \beta = \frac{1}{3}$ Por lo tanto $a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$

b) $a_{10} = 638$

4) a) Es un PSMC.

b) A cargo del lector.