* MATRICES ELEMENTALES Y OTRO METODO PARA HALLAR A^{-1}.

Desarrollaremos de aqui en mas un algoritmo sencillo para encontrar la inversa de una matriz invertible.

*** Definicion:**

Se dice que un matriz cuadrada de orden n es una Matriz Elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad de orden n realizando una sola operacion elemental sobre los renglones.

Ejemplo:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ Es una matriz elemental ya que la obtenemos al multiplicar el segundo renglon de I_2 por -3.

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \text{Es una matriz elemental ya que la obtenemos intercambiando el segundo} \\ \text{y el cuarto renglon de } I_4. \end{cases}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} \text{Es una matriz elemental ya que la obtenemos sumando 3 veces el tercer} \\ \text{renglon de } I_3 \text{ al primer renglon.} \end{cases}$

$iv)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ multipliquese el primer renglon de I_3 por 1.

Cuando se multiplica por la izquierda una matriz A por una matriz elemental E, el efecto es el de realizar una operacion elemental sobre los renglones en A.

***Teorema**

Si la matriz elemental E resulta al efectuar cierta operacion sobre los renglones en I_m y si A es una matriz de $m \times n$, el producto EA es la matriz que resulta al efectuar la misma operacion sobre los renglones de A.

Ejemplo:

Sea $A_{3\times4}$ / $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ y sea la matriz elemental E_3 / $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que resulta al sumar 3 veces el primer renglon de I_3 al tercer renglon. El producto EA es :

$EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix}$ que es precisamente la misma matriz que resulta al sumar 3 veces el primer renglon de A al tercer renglon.

.

$\boxed{\text{* Observacion:}}$
El teorema anterior es principalmente de interes teorico y se aplicara para desarrollar algunos resultados acerca de las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales.

$\boxed{\text{OPERACIONES ELEMENTALES:}}$

- Multiplicar el renglon i por $c \neq 0$
-Intercambiar los renglones i y j
- Sumar c veces el renglon i al renglon j

$\boxed{\text{* Teorema}}$
Toda matriz elemental es invertible y la inversa tambien es una matriz elemental.

$\boxed{\text{* Nota:}}$ Si es posible obtener una matriz B a partir de una matriz A, efectuando una sucesion finita de operaciones elementales sobre los renglones, entonces, obviamente, se puede regresar de B hacia A, llevando a cabo las inversas de estas operaciones, en orden inverso.

Las matrices que se pueden obtener una de la otra por medio de una sucesion finita de operaciones elementales sobre renglones, se dice que son EQUIVALENTES respecto a los renglones.

$\boxed{\text{* Teorema:}}$ Si A es una matriz de orden n, entonces las siuientes proposiciones son equivalentes:
a) A es invertible
b) AX=0 tiene unicamente la solucion trivial ($X=\theta$)
c) A es equivalente respecto a los renglones a I_n.

A partir de este teorema veremos un metodo para determinar la inversa de una matriz invertible.

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se desea reducir A hacia la matriz identidad por operaciones sobre los} \\ \text{renglones y, simultaneamente, aplicar estas operaciones a I para producir} \\ A^{-1}. \end{array} \right.$

Se puede realizar esto, adjuntando la matriz identidad a la derecha de A y aplicando las operaciones sobre los renglones a ambos lados, hasta que el lado izquierdo se reduce a I. Entonces la matriz final tendra la forma $\left[I \mid A^{-1} \right]$. Los calculos se pueden realizar de la siguiente forma:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{A \qquad I}$$

.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} \text{Se sumo -2 veces el primer renglon al segundo y -1 veces} \\ \text{el primer renglon al tercero.} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \{\text{Se sumo 2 veces el segundo renglon al tercero}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \text{Se multiplico el tercer renglon por -1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{cases} \text{Se sumo 3 veces el tercer renglon al segundo y -3 veces el tercer} \\ \text{renglon al primero} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \text{Se sumo -2 veces el segundo renglon al primero.}$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

A menudo no se sabra con anterioridad si una matriz dada es invertible. Si se intenta el procedimiento aplicado en este ejemplo sobre una matriz que no es invertible, entonces, sera imposible reducir el lado izquierdo hacia I por operaciones sobre los renglones.

En algun paso del calculo, se presentara un renglon de ceros en el lado izquierdo; entonces se puede concluir que la matriz dada no es invertible y detener los calculos.