Sistema de Ecuaciones Lineales   Matrices y Determinantes

Prof. Gustavo Sosa

* Producto de un numero por una matriz.

En el conjunto de las matrices $M_{m\times n}$ definiremos la siguiente ley de composicion externa, denominada producto de un numero real por una matriz.

* Definicion

$\mathbb{R}\times M_{m\times n} \to M_{m\times n}$, en donde $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \mathrm{A} \in M_{m\times n},\ \exists! B \in M_{m\times n} \,/\, \alpha A = B \ y\ \alpha a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

* Producto de matrices.

* Definicion

Sean las matrices $\mathrm{A}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ y $\mathrm{B}_{\mathrm{n}\times\mathrm{p}}$, se define el producto entre matrices como:

$\bullet : M_{m\times n} \times M_{n\times p} \to M_{m\times p}$ tal que A•B=C, siendo $\mathrm{c}_{\mathrm{ij}} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}.b_{kj}$

* Observaciones:

-De la definicion se desprende que para poder multiplicar dos matrices, estas deben ser conformables, es decir que el numero de columnas de la primer matriz debe ser igual al numero de filas de la segunda. El elemento c_{ij} de la matriz producto, se obtiene a partir de la fila i de la primer matriz, y de la columna j de la segunda, de la siguiente manera: se multiplica el primer elemento de la fila i de la matriz A, por el primero de la columna j de B, el segundo de la fila con el segundo de la columna, y asi sucesivamente, sumandose posteriormente todos los productos, es decir:

$\mathrm{c}_{\mathrm{ij}} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + ... + a_{in}.b_{nj}$

− El producto de matrices NO ES CONMUTATIVO. (verificarlo)

Ejemplo: Sea $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 2} \quad y \quad B = \left(b_{ij}\right)_{2\times 4} \quad tal\ \ que: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad y\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$

El resultado de A y B son conformables, el resultado de A.B es una matriz $\mathrm{C}_{3\times 4}$

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}}^{B_{2\times 4}} \\
\overbrace{\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \\ a_{31} \quad a_{32} \end{pmatrix}}^{A_{3\times 2}} & \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{c_{11}} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}}_{C_{3\times 4}}
\end{array}
$$

$$\Rightarrow c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21}$$

$$c_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{21}$$

....

$$c_{34} = a_{31}.b_{14} + a_{32}.b_{24}$$

* $\boxed{\text{Matriz Traspuesta}}$

Si A es una matriz de $m\times n$, entonces la transpuesta de A, denotada por A^T, es una matriz $n\times m$ cuya i-esima fila es la i-esima columna de A y cuya j-esima columna es la j-esima fila de A.

Si $A=\left(a_{ij}\right)$, entonces $A^T=\left(a_{ji}\right)$

* $\boxed{\text{Matriz inversa de una matriz cuadrada.}}$

- Dada una matriz A de orden n, si existe, es unica la matriz A^{-1}, que llamamos matriz inversa, y tal que $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$

* Observacion: No siempre existe la inversa de una matriz, si no existiese se dice que la matriz no es invertible o que es singular.

*$\boxed{\textit{Teorema:}}$ Si una matriz de $n\times n$ tiene inversa, esta es unica

Dem:

Suponga que A tiene inversa A^{-1} y B es una matriz (posiblemente distinta), tal que B.A=I.

Entonces: $B=B.I=B.(A.A^{-1})=(B.A).A^{-1}=I.A^{-1}=A^{-1}$

*$\boxed{\textit{Teorema}}$ Si A y B son matrices invertibles de $n\times n$ entonces AB es invertible y $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Ejemplo:

$Sea\ \ A_2\ /\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, debemos encontrar una matriz $B_2\ /\ AB=I_2$

$$\Rightarrow Sea\ \ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}}^{A}.\overbrace{\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}}^{B}=\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}^{I_2}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{1.b_{11}+0.b_{21}=1}\\ \boxed{\boxed{1.b_{12}+0.b_{22}=0}}\\ \boxed{2.b_{11}+1.b_{21}=0}\\ \boxed{\boxed{2.b_{12}+1.b_{22}=1}}\end{cases}\Rightarrow$$

observemos que obtuvimos 4 ecuaciones, donde la 1ª y la 3ª y la 2ª y la 4ª tienen las mismas incognitas respectivamente, entonces pasamos a resolver dos sistemas de 2 ecuaciones con dos incognitas:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}1.b_{11}+0.b_{21}=1\\ 2.b_{11}+1.b_{21}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_{11}=1\\ 2.b_{11}+1.b_{21}=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{b_{11}=1\ \ y\ \ b_{21}=-2}\\ \begin{cases}1.b_{12}+0.b_{22}=0\\ 2.b_{12}+1.b_{22}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_{12}=1\\ 2.b_{12}+1.b_{22}=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{b_{12}=0\ \ y\ \ b_{22}=1}\end{array}\right\}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora con B determinada el lector podra verificar que $A.B=I_2$.

Este procedimiento es mecanico pero puede resultar muy engorroso si trabajamos con matrices de dimensiones mas grandes. Busquemos mas mecanismos para determinar, en caso de que exista, la inversa de una matriz.

.

* $\boxed{\boxed{\textit{DETERMINANTES}}}$

* Definicion: Determinante de una matriz.

Dada una matriz A de dimension $n \times n$, definimos ij-esimo menor complementario de la matriz A y lo anotamos M_{ij}, a la matriz de dimension $(n-1)\times(n-1)$, que se obtiene eliminando la fila i-esima y la columna j-esima de la matriz A.

El DETERMINANTE de una matriz $n \times n$ (anotamos det A o $|A|$) se define de la siguiente manera:

1) Si $A = (a)_{1\times1} \Rightarrow \det\ A = a$

2) Si $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ con $n > 1 \Rightarrow$

$$\det\ A = a_{11}.\det\ M_{11} - a_{12}.\det M_{12} + ... + (-1)^{1+j}.a_{1j}.\det M_{1j} + ... + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det M_{1n}$$

La definicion de determinante es una definicion por recurrencia. Observese que los escalares $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ son los elementos de la primer fila de A.

* Definicion:

Sea $A = \left(a_{ij}\right)$, definimos el adjunto A_{ij} de a_{ij} al numero: $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\det M_{ij}$, entonces el $\det\ A = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + ... + a_{1n}.A_{1n}$

Teorema : Si $A=\left(a_{ij}\right)$ y $|A| \neq 0$ (no es singular), con A de orden n.

$$\text{Sea } B=\left(b_{ij}\right), \text{ con } b_{ij} = \frac{A_{ji}}{|A|}, \text{ se cumple: } A.B=B.I=I_n$$

Nota: La matriz B la denominaremos matriz inversa de la matriz A , y $B=A^{-1}$

Obs: $A=\left(a_{ij}\right)$ de orden n tiene inversa $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

Ejemplo: Investigar si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene inversa, y en caso afirmativo calcularla.

$|A|=1 \neq 0$ entonces A tiene inversa $B=A^{-1}$

Sea $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $b_{11} = \frac{A_{11}}{|A|} = \frac{3}{1} = 3,\quad b_{12} = \frac{A_{21}}{|A|} = \frac{-2}{1} = -2,\quad b_{21} = \frac{A_{12}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1$

y $b_{22} = \frac{A_{22}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Verifica que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

.

Propiedades de los Determinantes

1- Un determinante no varía si se intercambian sus filas por sus columnas.

2- Si se multiplica una línea de un determinante por un número real, el determinante queda multiplicado por ese real.

3- Un determinante es nulo si tiene dos líneas paralelas proporcionales.

4- Un determinante cambia de signo, manteniendo su valor absoluto, si se intercambian dos líneas paralelas del mismo.

5- Un determinante es nulo si todos los elementos de una línea son ceros.

6- El valor de un determinante no varía si se sustituye una línea por la que resuslta de sumarle a ella, una combinación lineal de las restantes líneas paralelas.

Observación:

- Se llama *menor complementario* del elemento a_{ij} de una matriz **A** (lo notamos M_{ij}) , al determinante de la matriz que se obtiene luego de suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de la matriz **A**.
- Se llama *adjunto* del elemento a_{ij} de una matriz **A** (lo notamos A_{ij}), al número real que se obtiene luego de multiplicar $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario del elemento a_{ij} .

7- Desarrollo de Laplace

El valor de un determinante de orden n es igual a la suma de n productos, cada uno de los cuales resulta de multiplicar cada elemento de una linea por su correspondiente adjunto. Ejemplo: Sea A de orden 3,

|A|=

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}.A_{21} + a_{22}.A_{22} + a_{23}.A_{23} = -a_{21}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Prof. Gustavo Sosa