Sistemas de ecuaciones lineales

TIPOS DE SISTEMAS. DISCUSIÓN DE SISTEMAS.

Podemos clasificar los sistemas según el número de soluciones:

Incompatible. No tiene solución

Compatible. Tiene solución.

- **Compatible determinado**. Una única solución.
- **Compatible indeterminado**. Infinitas soluciones.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE GAUSS-JORDAN.

Es el método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que consiste en llegar a un sistema "escalonado" transformando la matriz ampliada en una matriz escalonada por filas.

El **método de Gauss** es una generalización del **método de reducción**, que utilizamos para eliminar una incógnita en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en la aplicación sucesiva del **método de reducción**, utilizando los **criterios de equivalencia** de sistemas, para transformar la **matriz ampliada con los términos independientes** (**A***) en una **matriz triangular**, de modo que cada fila (ecuación) tenga una incógnita menos que la inmediatamente anterior. Se obtiene así un sistema, que llamaremos **escalonado**, tal que la última ecuación tiene una única incógnita, la penúltima dos incógnitas, la antepenúltima tres incógnitas, ..., y la primera todas las incógnitas.

El siguiente esquema muestra cómo podemos resolver un sistema de ecuaciones lineales aplicando este método.

Partimos, inicialmente, de un sistema de **n ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, **compatible determinado**:

$$\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n = b_n
\end{array}$$

En primer lugar, aplicando sucesivamente el método de reducción, eliminamos en todas las ecuaciones, excepto en la primera, la incógnita $\mathbf{x_1}$, obteniéndose un sistema equivalente:

$$
\begin{array}{r}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
c_{22} x_2 + c_{23} x_3 + \ldots + c_{2n} x_n = r_2 \\
c_{32} x_2 + c_{33} x_3 + \ldots + c_{3n} x_n = r_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{n2} x_2 + c_{n3} x_3 + \ldots + c_{nn} x_n = r_n
\end{array}
$$

En segundo lugar, aplicando nuevamente el método de reducción de forma sucesiva, eliminamos en todas las ecuaciones, excepto en las dos primeras, la incógnita $\mathbf{x_2}$, obteniéndose un sistema equivalente:

$$
\begin{array}{r}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
c_{22} x_2 + c_{23} x_3 + \ldots + c_{2n} x_n = r_2 \\
d_{33} x_3 + \ldots + d_{3n} x_n = s_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_{n3} x_3 + \ldots + d_{nn} x_n = s_n
\end{array}
$$

En tercer lugar, aplicando sucesivamente el método de reducción, eliminamos en todas las ecuaciones, excepto en las tres primeras, la incógnita $\mathbf{x_3}$, y así sucesivamente, hasta obtener el siguiente sistema equivalente:

$$
\begin{array}{r}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
c_{22} x_2 + c_{23} x_3 + \ldots + c_{2n} x_n = r_2 \\
d_{33} x_3 + \ldots + d_{3n} x_n = s_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_{nn} x_n = t_n
\end{array}
$$

Para **resolverlo** despejamos, en primer lugar, la única incógnita de la última ecuación. Luego sustituimos ésta en la penúltima ecuación y despejamos la otra incógnita. Posteriormente, sustituimos dos de las tres incógnitas de la antepenúltima ecuación por sus valores y despejamos la que queda, y así sucesivamente hasta llegar a la primera ecuación.

Las **transformaciones** que podemos realizar en dicha matriz para transformar el sistema inicial en otro **equivalente** son las siguientes:

- Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero.
- Sumarle o restarle a una fila otra fila.
- Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un número distinto de cero.
- Cambiar el orden de las filas.
- Cambiar el orden de las columnas que corresponden a las incógnitas del sistema, teniendo en cuenta los cambios realizados a la hora de escribir el nuevo sistema equivalente. Es decir: si, por ejemplo, la 2ª columna corresponde a la incógnita **y** y la tercera a la incógnita **z**, y cambiamos el orden de las columnas, ahora la 2ª columna corresponde a la incógnita **z** y la tercera a la incógnita **y**.
- Eliminar filas proporcionales o que sean combinación lineal de otras.
- Eliminar filas nulas **(0 0 0 ... 0)**.

Después de realizar las **transformaciones** que se consideren pertinentes, se obtendrá un **sistema escalonado**. Suponiendo que hubiésemos eliminado, si las hubiera, las filas nulas **(0 0 0 ... 0)**, que corresponden a ecuaciones del tipo **0 = 0**, el **sistema equivalente** tendría ahora **k ecuaciones lineales** con **n incógnitas**.

Analizando el sistema resultante, podemos efectuar su discusión del siguiente modo:

◊ Si alguna de las ecuaciones es del tipo **0 = b** (siendo **b** distinto de cero), el sistema es **incompatible** y no tiene solución.

◊ Si no hay ecuaciones del tipo **0 = b**, y además **k = n**, es decir, el número de ecuaciones del sistema equivalente es igual al número de incógnitas, el sistema es **compatible determinado** y, por lo tanto, tiene una única solución.

◊ Si no hay ecuaciones del tipo **0 = b** y **k < n**, es decir, el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado** y, en consecuencia, tiene infinitas soluciones. En este caso, tenemos que separar las incógnitas **principales** de las **no principales**.

Pero, **¿cuáles son las incógnitas principales?** Se puede dar el siguiente criterio: Si el sistema es escalonado y tiene **k ecuaciones**, las **k primeras incógnitas** serán las **principales** y las **n - k** restantes serán las **no principales** que pasaremos al segundo miembro como **parámetros**.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE CRAMER. REGLA DE CRAMER.

La regla de Cramer utiliza las propiedades de las matrices y sus determinantes para despejar, por separado, una cualquiera de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales.

REGLA DE CRAMER

Un sistema de ecuaciones lineales recibe el nombre de **sistema de Cramer** cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes (matriz del sistema) es distinto de cero (**det (A) ≠ 0)**

Un **sistema de Cramer** es, por definición, **compatible determinado**, puesto que se cumple que **rango (A) = rango (A*) = n** (nº de incógnitas).

Consideremos un **sistema de Cramer**, es decir, un sistema de **n ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, cuya expresión general es la siguiente:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Sean **A** la **matriz del sistema** , entonces **det (A) ≠ 0**.

Llamaremos **matriz asociada a la incógnita x_i** y la designaremos por **A_i** a la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz del sistema la columna **i** por la matriz columna de los términos independientes.

Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Todos los sistemas de Cramer son compatibles determinados. El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la matriz asociada a dicha incógnita por la matriz del sistema (matriz de los coeficientes de las incógnitas).

$$x_i = \frac{\mathrm{Det}(A_i)}{\mathrm{Det}(A)} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \; ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \; ;$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \; ; \ldots ; \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

¿Se puede aplicar la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles que tengan más ecuaciones que incógnitas?

La respuesta es **afirmativa**. Basta con obtener un sistema equivalente al inicial eliminando las ecuaciones superfluas o dependientes (proporcionales, nulas o que sean combinación lineal de otras).

El procedimiento a seguir es el siguiente: Supongamos que tenemos un sistema de **m ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, siendo **m > n** y tal que: **rango (A) = rango (A*) = n**. Por lo tanto,

sobran **m - n ecuaciones**. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, basta encontrar en la **matriz de los coeficientes** (**A**) un menor de orden **n** distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz **A**.
Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir.

Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$$

Encontrar el valor de *x* e *y* mediante la regla de Cramer.

Empezaremos con el primer paso, que consiste en hallar la matriz ampliada $A \vdots b$ asociada al sistema de ecuaciones lineales:

$$A|b = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

El segundo paso es calcular el determinante de *A*. Así pues:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17$$

Y el tercero y último paso consiste en calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{17} = \frac{11}{17} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{8}{17}$$

TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

¿El sistema tiene solución, es decir, es compatible? En caso afirmativo: **¿Tiene una solución o infinitas?**

Para responder estas preguntas, una de las herramientas que podemos utilizar es la que proporciona el **Teorema de Rouché-Fröbenius**, cuyo enunciado es el siguiente:

Consideremos un sistema de **m ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, cuya expresión general es la siguiente:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3$$
$$..$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

Sean **A** la **matriz del sistema** y **A*** la **matriz ampliada del sistema** (con los **términos independientes**).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas (A) sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes (A). Es decir: rango (A) = rango (A*).*

Si el valor común de los rangos coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Si, por el contrario, el valor de los rangos es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En resumen:

- **Si rango (A) = rango (A*) = n (número de incógnitas), el sistema es compatible determinado (tiene una única solución).**
- **Si rango (A) = rango (A*) < n (número de incógnitas), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).**
- **Si rango (A) ≠ rango (A*), el sistema es incompatible (no tiene solución).**

Un caso particular es el de los sistemas **homogéneos**, es decir, aquellos en los que todos los **términos independientes** son **nulos.** Pues, en este caso, las matrices **A** y **A*** son semejantes a efectos del cálculo del rango, dado que la matriz **A*** es la matriz **A** a la que se le añade una columna de ceros, que podemos suprimir para calcular el rango. Por lo tanto, siempre se cumple que **rango (A) = rango (A*)**. Esto quiere decir que **todos los sistemas homogéneos son siempre compatibles**.

Se cumple:

- **Si rango (A) = n (número de incógnitas), el sistema es compatible determinado. Tiene una única solución, que se conoce con el nombre de solución trivial. Es aquella en la que todas las incógnitas son nulas.**

- **Si rango (A) < n (número de incógnitas), el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).**

MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Consideremos un sistema de **n ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, cuya expresión general es la siguiente:

$$\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + \dots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 + \dots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \dots + a_{3n}\,x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + a_{n3}\,x_3 + \dots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{array}$$

Hemos visto que este sistema se puede escribir en **forma matricial** del siguiente modo: **A X = B**.

La matriz **A** se llama **matriz del sistema**, es de dimensión **n x n** y sus elementos son los **coeficientes** de las incógnitas.

La matriz **X** es una matriz columna, de dimensión **n x 1**, formada por las **incógnitas** del sistema.

Por último, la matriz **B** es otra matriz columna, de dimensión **n x 1**, formada por los **términos independientes**.

Es decir:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si el determinante de la matriz **A** es distinto de cero (**det (A)** $\neq$ **0**), la matriz **A** tiene inversa ($\mathbf{A^{-1}}$). Por lo tanto, podemos calcular la matriz de las incógnitas **X** del siguiente modo:

$$A \cdot X = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Es decir, para calcular la matriz columna de las incógnitas (**X**), multiplicamos la inversa de la matriz **A** ($\mathbf{A^{-1}}$) por la matriz columna de los términos independientes, obteniéndose otra matriz columna de la misma dimensión que **X**.

¿Se puede aplicar el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles que tengan más ecuaciones que incógnitas?

La respuesta es **afirmativa**. Basta con obtener un sistema equivalente al inicial eliminando las ecuaciones superfluas o dependientes (proporcionales, nulas o que sean combinación lineal de otras).

El procedimiento a seguir es el siguiente: Supongamos que tenemos un sistema de **m ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, siendo **m > n** y tal que: **rango (A) = rango (A*) = n**. Por lo tanto, sobran **m - n ecuaciones**. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, basta encontrar en la **matriz de los coeficientes** (**A**) un menor de orden **n** distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz **A**. Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir.

¿Se puede aplicar el método de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados?

La respuesta es también **afirmativa**.

El procedimiento a seguir es el siguiente: Supongamos que tenemos un sistema de **m ecuaciones lineales con n incógnitas**, tal que: **rango (A) = rango (A*) = k < n**. Por lo tanto, sobran **m - k ecuaciones** y, además, hay **n - k incógnitas no principales**. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, y cuáles son las incógnitas **no principales**, basta encontrar en la **matriz de los coeficientes** (**A**) un menor de orden **k** distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz **A**. Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las **ecuaciones principales** o **independientes**. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir. Las columnas que figuran en dicho menor corresponden a las **incógnitas principales**. Las incógnitas **no principales** las pasamos al otro miembro y pasan a formar un único término junto con el término independiente. Se obtiene, de este modo, un **sistema** de **k ecuaciones lineales** con **k incógnitas**, cuyas soluciones van a depender de **n - k parámetros** (correspondientes a las incógnitas **no principales**).

EJERCICIOS

1) Estudia, aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius, la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y, cuando sea posible, resuélvelos aplicando la Regla de Cramer o el método de la matriz inversa:

a) $\begin{aligned} 3x - 4y + 4z &= -1 \\ x - y + 2z &= 5 \\ 4x + 3y + z &= 6 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 4 \\ -x + y - 2z &= 2 \\ 5x - 7y + 4z &= 4 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 3x + 3y - 2z &= 2 \\ -2x - 2y + z &= 1 \\ 7x + 7y - 4z &= 0 \end{aligned}$

2) Resuelve, aplicando la Regla de Cramer en los casos que proceda, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 2y + 5z &= 0 \\ 2x - 2y - 5z &= 6 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 6x - 6y + 2z &= 3 \\ 3x + 2y - 4z &= 5 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 3x - 8y + 6z &= 3 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x + y - 2z &= 4 \\ -x + y + 3z &= 3 \\ 3x - y - 8z &= -2 \end{aligned}$

3) Discute y, en los casos que proceda, resuelve utilizando el Método de Gauss, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 2 \\ x + 3y - 2z &= 4 \\ -x + 13y - 8z &= 8 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 3x - 2y + z - t &= 6 \\ x + 2y - z + 2t &= 0 \\ -2x + 3y + 2z + 3t &= 7 \\ x - 4y - z - 2t &= -2 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= -1 \\ x - 9y + 10z &= 3 \end{aligned}$

4) Resuelve, aplicando el método de la matriz inversa en los casos que proceda, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{aligned} 2x + 3y - 6z &= 4 \\ 5x - 4y + 2z &= 3 \\ -3x + 7y - 8z &= 6 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x - 3y - 4z &= 3 \\ 3x + y - 9z &= -9 \\ 3x - 4y - 4z &= 1 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 4x + 3y - 5z &= 4 \\ 2x - 4y + 2z &= 3 \\ -2x - 7y + 7z &= -1 \end{aligned}$

5) Resuelve, aplicando el método que prefieras, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos:

a) $\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \\ 4x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x - 2y + z - t &= 0 \\ 2x - y + z - 2t &= 0 \\ x + 2y - 2z + t &= 0 \\ 4x - y - 2t &= 0 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 3x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 4y + 4z &= 0 \\ -x + 6y - 7z &= 0 \end{aligned}$