



**Ejemplo:**

Sea  $S = \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$  tiene como matriz del sistema  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  y matriz ampliada  $a$ :

$$A | b = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

**Matriz escalerizada reducida.**

Llamamos matriz escalerizada reducida a una matriz con las siguientes características:

- 1) Todas las filas a excepción quizás de la primera empiezan con cero.
- 2) Cada fila tiene al comienzo al menos un cero más que el comienzo de la anterior.
- 3) El primer componente no nulo de una fila es 1.
- 4) La columna correspondiente al primer componente 1 de una fila tiene como restantes elementos, ceros.

**Ejemplos:**

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$B = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**Observaciones:**

- 1) Cada escalón comienza con un 1, y su ancho puede ser de una o más columnas.
- 2) Debajo de los escalones se encuentran únicamente ceros.
- 3) Todo sistema (matriz) puede ser escalerizado mediante un número finito de operaciones elementales.

**MÉTODO DE GAUSS**

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones, consiste en efectuar operaciones elementales hasta obtener una matriz escalerizada reducida del sistema.

- **Ejemplo de Sistema compatible determinado. (S.C.D.)**

$$\text{Sea el sistema } S = \begin{cases} 2x - 4y + 6z = 0 \\ 4x + y + 3z = 9 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{ la matriz ampliada es } \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Recordemos que las transformaciones indicadas siempre están referidas a las filas de las matrices anteriores.

A continuación se crea un 1 en la posición  $a_{11}$ , multiplicando la fila por el inverso de  $a_{11}$ . Si en ese lugar hubiera un cero se intercambia esa fila con otra.

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Se crean ceros en el resto de la primer columna. (El proceso de ir llevando cada columna a la forma descripta anteriormente recibe a veces el nombre de pivoteo).

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{-4F_1+F_2} \\ \xrightarrow{-F_1+F_3} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 9 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

En el primer elemento no nulo de la segunda fila, ( $a_{22}=9$ ), se crea un 1, multiplicando la fila por el inverso de  $a_{22}$ .

$$\xrightarrow{\frac{1}{9}F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Se crean ceros en la segunda columna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{2F_2+F_1} \\ \xrightarrow{-4F_2+F_3} \end{array} \right. \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Se multiplica por su inverso al primer elemento no nulo de la tercera fila ( $a_{33}$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \end{array} \right. \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Se crean ceros en la tercer columna.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{-F_3+F_1} \\ \xrightarrow{F_3+F_2} \end{array} \right. \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema equivalente a la matriz anterior es  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ , de donde  $\text{sol}(S) = \{(2,1,0)\}$  S.C.D.

**Nota:**

El número de escalones de la matriz ampliada, es el mismo que el de la matriz del sistema, (o sea suprimiendo la última columna), lo que indica que el sistema es compatible. Además todos los escalones tienen de igual ancho una columna, lo que implica que en el sistema cada ecuación tiene una incógnita más que la inmediata inferior, por lo que el sistema es determinado.

• **Ejemplo de Sistema compatible indeterminado.**

Resolveremos el sistema: 
$$\begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = -3 \\ 2x - y + \frac{1}{2}z = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & -3 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{15}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & -3 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{15}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} -F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3 \end{cases}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 2 & | & -3 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} & | & -\frac{15}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{3}{4} \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} & | & -\frac{15}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{cases} 3F_2+F_1 \\ -5F_2+F_3 \end{cases}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & | & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

La anterior matriz ampliada es correspondiente al siguiente sistema: 
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = -\frac{9}{4} \\ y + \frac{1}{2}z = -\frac{3}{4} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Al aparecer una identidad en el sistema, este quedara indeterminado, ya que tenemos dos ecuaciones con tres incognitas. Si se despeja la incognita "y", en la segunda ecuacion resultara  $y = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{4}$ ,

y en la primera ecuacion queda  $x = -\frac{1}{2}z - \frac{9}{4}$ . La incognita "z", no puede determinarse, pudiendose elegir libremente quedando x e y en funcion de ella.

Cada valor elegido libremente de z, determina una terna solucion. En virtud de que una de las incognitas del sistema puede elegirse de este modo decimos que el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO, con un GRADO DE LIBERTAD, y las infinitas soluciones, estan dadas

por las ternas  $\left(-\frac{1}{2}z - \frac{9}{4}, -\frac{1}{2}z - \frac{3}{4}, z\right)$  con  $z \in \mathbb{R}$

- **Ejemplo se sistema incompatible**

Observe el lector que el sistema  $\begin{cases} 2y + 2z = 8 \\ 4x + 8y - 12z = 2 \\ -6x - 12y + 18z = 6 \end{cases}$  es INCOMPATIBLE

•  
**Teorema de Rouché-Fröbenius**

Para todo sistema lineal  $S$ , de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, con matriz del sistema  $A$ , y matriz ampliada  $A | b$ , siendo  $p$  el número de escalones de  $A$ , y  $q$  el número de escalones de  $A | b$ , se cumple una y sólo una de las siguientes opciones:

- $S$  es compatible determinado si y solo si  $p=q$  y  $p=n$ .
- $S$  es compatible indeterminado si y solo si  $p=q$  y  $p<n$ .
- $S$  es incompatible si y solo si  $p \neq q$ .