Sistema de Ecuaciones Lineales
Matrices y Determinantes

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen muchas aplicaciones. Se encuentran en economía, ciencias sociales y medicina, así como en ciencias biológicas, física y matemática.
El método que usaremos para resolver tales sistemas se llama eliminación gaussiana, en honor a Carl Friedrich Gauss, uno de los matemáticos mas prolíferos de la historia.

Desarrollo

.

El termino lineal proviene de la palabra linea. La ecuacion de una recta en el plano (xy) es cualquier ecuacion que pueda escribirse de la forma: $a_1 x + a_2 y = b$ con a_1, a_2 y b constantes donde a_1, a_2 no son simultaneamente nulas.
Dicha ecuacion se llama ecuacion lineal en las variables x e y.
En general Ecuacion Lineal en las variables $x_1, x_2, ..., x_n$, es cualquiera que pueda escribirse:
$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b,$ donde $a_1, ..., a_n$ y b son constantes y $a_1, ..., a_n$ no son todas nulas.

Definicion:
Una SOLUCION de una ecuacion lineal $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b,$ es un conjunto de numeros $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ tales que si sustituimos tenemos: $a_1 t_1 + a_2 t_2 + ... + a_n t_n = b.$
RESOLVER una ecuacion es encontrar todas sus soluciones; el conjunto de soluciones se llama CONJUNTO SOLUCION.

SISTEMAS LINEALES
Un sistema lineal (S), de m ecuaciones con n incognitas puede ser identificado con una estructura del siguiente tipo:

$$\text{S}=\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ : \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

La n-upla $(t_1, t_2, ..., t_n)$ es una solucion del sistema (S), si verifica simultaneamente las m ecuaciones del mismo.
Resolver un sistema significa identificar todas las soluciones del mismo, en caso de tenerlas.
Puede suceder que el sistema tenga una sola solucion, en tal caso diremos que el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.
Si en un sistema, las ecuaciones son incompatibles entre si, es decir no existe ninguna n-upla que verifique a todas las ecuaciones, el conjunto solucion sera vacio, y en tal caso el sistema se llamara INCOMPATIBLE.
Asi mismo existen sistemas de ecuaciones que tienen infinitas soluciones. Si ocurre esta situacion diremos que el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

RESUMIENDO:

- **Sistemas Lineales** → **Compatibles**
  - **Compatibles** → **Determinados** → **Solución Unica**
  - **Compatibles** → **Indeterminado** → **Infinitas Soluciones**
- **Sistemas Lineales** → **Incompatible** → **No existen soluciones**

MATRICES

Dados dos conjuntos de numeros naturales positivos $F=\{1,...,m\}$, (filas), y $C=\{1,...,n\}$, (columnas), llamamos matriz $A_{m\times n}$, a una funcion $F\times C\to\mathbb{R}$.

Definición

Si m y n $\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ una matriz de $m\times n$, es un arreglo rectangular con m renglones y n columnas

de la forma: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ : & : & : & : \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,donde cada a_{ij} es un numero llamado entrada o elemento de la matriz. Los numeros m y n se llaman Dimensiones de la matriz.

Observacion: El primer subindice "i" indica en que renglon esta el elemento y el segundo "j", la columna.

* Igualdad de Matrices

$$A_{m\times n}=B_{p\times q}\Leftrightarrow\begin{cases} m=p \quad , \; n=q \\ a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i,j, \quad 1\le i\le m, \quad 1\le j\le m \end{cases}$$

* Matrices Particulares

$*_1$ Matriz Cuadrada: Son matrices con igual numero de filas que de columnas, osea m=n.

Anotamos A_n. Ejemplo: $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$

$*_2$ Matriz fila y matriz columna: La matriz fila tiene unicamente una fila: $F_{1\times n}=\left(a_{11}\; a_{12}...a_{1n}\right)$

La matriz columna tiene unicamente una columna: $C_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ : \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, tambien pueden recibir el nombre de vector fila y vector columna.

$*_3$ Matriz Nula: Es aquella matriz cuyos elementos son todos nulos.

$*_4$ Matriz Diagonal: Se llama diagonal principal de una matriz cuadrada de orden n a todos los elementos de la forma $a_{ii} \ \ \forall i \ de \ 1 \ a \ n.$

Sea A_n una matriz cuadrada de orden n, diremos que A_n es una matriz diagonal si y solo si:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & si \ \ i = j \\ 0 & si \ \ i \neq j \end{cases}$$

$*_5$ Matriz identidad: Sea A_n una matriz cuadrada de orden n, diremos que A_n es la matriz identidad de orden n si:$(a_{ij}) = \begin{cases} 1 & si \ i = j \\ 0 & si \ i \neq j \end{cases}$, la anotaremos I_n

*Suma De Matrices

La suma de matrices, solo es posible cuando éstas tienen igual dimensión.

Definición :

Se define la suma $+: \ M_{m\times n} \rightarrow M_{m\times n}$, en donde $\forall A_{m\times n} \ y \ B_{m\times n} \ con \ A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right) y \ B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)$, existe y es unica $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)$ tal que A+B=C y $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \forall i, j$

- Producto de un número por una matriz.

Definición:

$\mathbb{R} \times M_{m\times n} \rightarrow M_{m\times n}$, en donde $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m\times n}, \exists! B \in M_{m\times n} \ \ tal \ que: \alpha A = B \ y \ \alpha a_{ij} = b_{ij} \ \ \forall i, j$

- Producto de Matrices.

Definición:

Sean las matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$, se define el producto entre matrices como:

$\bullet : M_{m\times n} \times M_{n\times p} \rightarrow M_{m\times p}$ tal que A•B=C siendo $c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}.b_{kj}$

Observaciones:

- De la definición se desprende que para poder multiplicar dos matrices, éstas deben ser CONFORMABLES, es decir que el número de columnas de la primer matriz debe ser igual al número de filas de la segunda.

El elemento c_{ij} de la matriz producto, se obtiene a partir de la fila i de la primer matriz, y de la columna j de la segunda, de la siguiente manera: se multiplica el primer elemento de la fila i de la matriz A, por el primero de la columna j de B; el segundo de la fila i con el segundo de la columna, y asi sucesivamente, sumandose posteriormente todos los productos, es decir:

$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$