Roberto Gil Matemática I – Informática

<u>Resolución Ejercicio Nº 5</u>

Demostrar por inducción completa, que la suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible entre 9

Demostrar que la suma de tres enteros consecutivos es divisible entre 9 es equivalente a demostrar que dicha suma es múltiplo de 9

Sea $n \in Z$ hay que demostrar que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = \dot{9}$ desarrollando esta expresión, teniendo en cuenta el triángulo de Pascal y reordenando tenemos que:

$$\boxed{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 15n + \underbrace{9n^2 + 9}_{es\ \dot{9}}}$$ (1) , por lo tanto solo resta demostrar

que $3n^3 + 15n = \dot{9}$ lo cual haremos por Inducción Completa

Base Inductiva

si $n = 1$ $\quad 3(1)^3 + 15(1) = 18 \quad es\ \dot{9}$

Paso Inductivo

H) $3n^3 + 15n = \dot{9}$

T) $3(n+1)^3 + 15(n+1) = \dot{9}$

Demostración:

$$3(n+1)^3 + 15(n+1) = 3(n^2 + 2n + 1)(n+1) + 15(n+1) \underbrace{=}_{\text{factor comun (n+1)}}$$

$$= (n+1)(3n^2 + 6n + 18) = 3n^3 + 9n^2 + 24n + 18 = \underbrace{3n^3 + 15n}_{\text{es } \dot{9} \text{ por H}} + \underbrace{9(n^2 + n + 2)}_{es\ \dot{9}} = \dot{9}$$

Entonces la igualdad (1) se verifica para todo $n \in N, \quad n \geq 1$

Para poder afirmar que la igualdad se verifica $\forall n, \quad n \in \mathbb{N}$ falta probarla para n=0.

Entonces, para n=0, $3(0)^3 + 15(0) = 0 \quad es\ \dot{9}$

Ahora si, la igualdad se verifica $\forall n, \quad n \in \mathbb{N}$.