RESUMEN DE RELACIONES Y FUNCIONES

Producto cartesiano:
Dados dos conjuntos A y B, llamaremos producto cartesiano AxB $=\{(a,b)/a \in A \wedge b \in B\}$

Relación de A en B:
Dados dos conjuntos A y B, llamaremos **relación de A en B** a cualquier subconjunto de AxB.

Llamaremos relación **binaria en A**, a cualquier subconjunto de AxA.

Propiedades de Relaciones de A en A

Para ejemplificar las propiedades de las relaciones utilizaremos el conjunto $A=\{1,2,3,4\}$.

Propiedad reflexiva (o idéntica):
Una relación R sobre un conjunto A es reflexiva si para todo $x \in A$ entonces $(x,x) \in R$. En otras palabras una relación es reflexiva si todo elemento del conjunto sobre el que está definida, está relacionado consigo mismo.
$\forall x \in A$ se cumple que $(x,x) \in R$.
Ejemplo: $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ Otro ejemplo: $R_2 = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,3), (1,4) \}$

Propiedad antirreflexiva, también llamada irreflexiva:
Una relación R sobre un conjunto A es antirreflexiva si para todo $x \in A$ se cumple que $(x,x) \notin R$, es decir que $\forall x \in A$ se cumple que x no está relacionado consigo mismo.
Ejemplo: $R = \{ (1,2), (2,1), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) \}$

Propiedad simétrica:
Una relación R sobre un conjunto A es simétrica si para todo $x \in A$, $y \in A$, si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \in R$.
Dicho de otra forma: $\forall x,y \in A$ se cumple que si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \in R$
Ejemplo: $R = \{ (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (4,2), (4,4) \}$

Propiedad antisimétrica :
Una relación R sobre un conjunto A es antisimétrica si para todo $x \in A$, $y \in A$,
si x R y e y R x entonces x=y.
De nuevo: $\forall x,y \in A$ se cumple que si $(x,y), (y,x) \in R$ entonces $x=y$.
Ejemplo: $R=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
Pregunta: Si el par (1,3) pertenece a la relación, ¿podría estar el par (3,1)?
Según la definición, si esta el (1,3) y está el (3,1) entonces debería ser 1=3, absurdo!!!

Propiedad asimétrica:
Una relación R sobre un conjunto A es asimétrica si para todo $x \in A$, $y \in A$, si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \notin R$.
Dicho de otra forma: $\forall x,y \in A$ se cumple que si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \notin R$
Ejemplo: $R = \{ (1,2), (1,3), (2,4), (4,3) \}$
Los pares (n,n) no pueden estar, por definición. Las relaciones asimétricas son antirreflexivas.

Propiedad transitiva:
Una relación R sobre un conjunto A es transitiva si para todo $x \in A$, $y\in A$, $z\in A$ si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$ entonces $(x,z) \in R$.
$\forall$ x,y,z $\in$ A se cumple que si (x,y), (y,z) $\in$ R entonces (x,z) $\in$ R.
Ejemplo: R={(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)}

Relaciones de Orden

Relación de orden parcial:
Una relación R sobre un conjunto A es una relación de orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplo: La relación "inclusión" entre conjuntos es de orden parcial.

- Reflexiva: $\forall$ A, se cumple que $A \subseteq A$.
- Antisimétrica: $\forall$ A,B se cumple que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces A=B
- Transitiva: $\forall$ A,B,C se cumple que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$

Observación: Existen conjuntos no vacíos que no son comparables, es decir que $A \cap B=\emptyset$, cumplen que A no está incluido en B, y viceversa, B no está incluido en A.

Relación de orden total:
Una relación R sobre un conjunto A es una relación de orden total si R es de orden parcial, pero además cumple que todos sus elementos están relacionados, es decir que $\forall$ x,y $\in$ A, se cumple que x R y o bien y R x.
$\forall$ x,y $\in$ A, se cumple que (x,y) $\in$ R o bien (y,x) $\in$ R.

Ejemplo: La relación "menor o igual" en el conjunto de los números reales es de orden total.

- Obviamente cumple con las propiedades mencionadas
- Además todos los elementos son comparables pues dados dos números reales x e y podemos decidir si: $x \leq y$, $y \leq x$ ó x=y, cosa que no ocurre con la "inclusión" del ejemplo anterior.

Relación de equivalencia

Definición: Una relación R sobre un conjunto A es una relación de equivalencia si R es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo: R = { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,4), (1,4), (3,1), (4,3), (4,1) }

Clases de equivalencia: Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, llamaremos clase de equivalencia del elemento "a" de A, y lo indicaremos $[a]_R$ ó C_a , al subconjunto de A integrado por los elementos relacionados a dicho elemento.

O sea: $[a]_R = \{x \in A \,/\, x\ R\ a\}$
Propiedades:
1. Las clases de equivalencia no son vacías, ya que por lo menos la integra el elemento que le da nombre.
2. $[a]_R = [b]_R \Leftrightarrow a\ R\ b$, es decir que dos clases de equivalencia son iguales si $(a,b) \in R$.
3. $[a]_R \neq [b]_R \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

Partición de un conjunto:

Dado un conjunto A, una partición de A es una colección de subconjuntos de A que cumplen:
1) los subconjuntos no son vacíos,
2) los subconjuntos son disjuntos dos a dos,
3) la unión de todos los subconjuntos son el conjunto A, o sea:

Veamos primero un ejemplo: A={1,2,3,4}. Una partición de A es B={2} C={1,3,4}

1. $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$
2. $B \cap C = \varnothing$
3. $B \cup C = A$

En general, los conjuntos A_i forman una partición en A si verifican estas 3 condiciones:

* $A_i \neq \varnothing$	Ningún conjunto es vacío.
* $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall\ i \neq j$	Los conjuntos son disjuntos; no tienen elementos en común.
* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$	Este símbolo significa que la unión de todos los subconjuntos forman A.

Conjunto cociente:

Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, esta relación determina sobre dicho conjunto una partición. Es decir, supongamos que dicha relación R determinó sobre A, las clases de equivalencia $[a_1]$, $[a_2]$, $[a_3]$,…,$[a_n]$, entonces: 1) las clases no son vacías, 2) las clases son disjuntas dos a dos, y 3) la unión de todas las clases es el conjunto A, o sea:

1. $[a_i] \neq \varnothing,\ \forall\ i=1;2;\ldots;n$
2. $[a_i] \neq [a_j],\ \forall\ i \neq j$
3. $[a_1] \cup [a_2] \cup [a_3] \cup \ldots \cup [a_n] = A$

Llamaremos conjunto cociente y lo representaremos A/R, al conjunto de todas las clases de equivalencia determinadas por R sobre A.
$A/R = \{[a] \ / \ a \in A\}$

Relación inversa:
Dados dos conjuntos A, B y una relación $R \subseteq A \times B$; una relación entre ellos se denomina relación inversa de R, y se representa por R^{-1}, a la relación que asocia a los elementos de B con los de A, asociados a través de R.
$R^{-1} = \{(b,a) \in A \times B \ / \ (a,b) \in R\}$

Funciones

Definición de función:
f: $A \rightarrow B$, es una función, si f es una relación de A en B, tal que todo elemento de A está relacionado con un único elemento de B. O sea que todos los elementos de A aparecen una única vez en el subconjunto de AxB considerado.
Dicho de otra forma: $\forall$ a $\in$ A, $\exists$ b $\in$B, b único / b = f(a)

Función inyectiva:
f: $A \rightarrow B$, es una función inyectiva, si los elementos de B aparecen una única vez en la relación de A en B considerada.
Dicho de otra forma: si a elementos distintos de A, le corresponden elementos distintos de B.

- $\forall\ a_1 \neq a_2$, a_1, $a_2 \in$ A se cumple que $f(a_1) \neq f(a_2)$
- Si $f(a_1)=f(a_2)$ $\forall\ a_1, a_2 \in$ A entonces $a_1 = a_2$

Función sobreyectiva:
f: $A \rightarrow B$, es una función sobreyectiva, si todos los elementos de B son correspondientes de algún elemento de A. O sea todo elemento de B, es segunda componente del subconjunto de AxB considerado.
$\forall\ b \in B \Rightarrow \exists\ a \in A /\ b=f(a)$

Función biyectiva:
f: $A \rightarrow B$, es una función biyectiva, si f es inyectiva y sobreyectiva.
O sea la correspondencia es uno a uno.

Función inversa: Ver relación inversa.

Función inversa: Sea f: $A \rightarrow B$ una función, llamaremos función inversa de f (y la notamos f^{-1}) a la función f^{-1}: $B \rightarrow A$ / $f^{-1} = \{(y,x) \in BxA\ /\ (x,y) \in f\}$.
Cabe preguntarnos: si f es una función, ¿ f^{-1}lo será?
f^{-1}: $B \rightarrow A$ / $f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$